POLIMODAL

# MATEMÁTICA 1

ACTIVA

PUERTO DE PALOS ORIGINAL Binario

PUERTO DE PALOS
CASA DE EDICIONES

# FE DE ERRATAS

## Polimodal Matemática 1

*...y al final el diablo metió la cola*

| DONDE DICE | DEBE DECIR |
|---|---|
| ● **página 35**<br>**Ejercicio 10.1**<br>Simplifiquen los índices de cada una de las siguientes raíces. | ● **página 35**<br>**Ejercicio 10.1**<br>Extraigan todos los factores posibles de cada una de las siguientes raíces. |
| ● **página 148**<br>El "sistema formado por dos parábolas" es: $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = dx^2 + ex + c \end{cases}$ | ● **página 148**<br>El "sistema formado por dos parábolas" es: $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = dx^2 + ex + f \end{cases}$ |

ESCUELA MEDIA Nº 13
BIBLIOTECA

*...mil disculpas. "Errar es humano..."*

PUERTO DE PALOS
CASA DE EDICIONES

POLIMODAL


**AUTORÍA**

**Adriana Berio**
Profesora de Matemática y Astronomía
(INSP "J. V. González").

**María Lucila Colombo**
Profesora de Matemática y Física (UCA).
Posgrado en Estadística aplicada a la investigación
(Universidad Nacional de Córdoba).

**Carina D'Albano**
Profesora de Matemática y Astronomía
(INSP "J. V. González").
Licenciada en Gestión Educativa (CAECE).
Posgrado en Estadística aplicada a la investigación
(Universidad Nacional de Córdoba).

**Oscar Sardella**
Profesor de Matemática y Astronomía
(INSP "J. V. González").

**Irene Zapico**
Profesora de Matemática y Astronomía
(INSP "J. V. González").

**LECTURA CRÍTICA**

**Daniel Arroyo**
Profesor de Matemática y Astronomía
(INSP "J. V. González").
Profesor especializado en Informática Educativa
(ISI "Jesús María").



ESCUELA MEDIA Nº 13
BIBLIOTECA

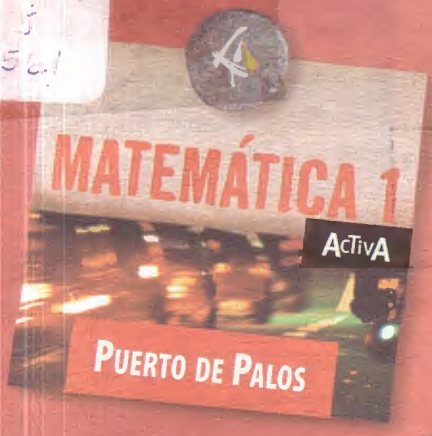
SALA DE LECTURA


# MATEMÁTICA 1

ACTIVA

PUERTO DE PALOS

512.5
M5
v.1
ed.1




INVENTARIO 25641/02

**PROYECTO Y DIRECCIÓN EDITORIAL:** Raúl A. González
**COORDINACIÓN EDITORIAL:** Guillermo E. Höhn
**DIRECCIÓN DE ARTE:** María José de Tellería

**EDICIÓN**
Pablo Effenberger

**AUTORÍA**
**Matemática**
Adriana Berio
María Lucila Colombo
Carina D'Albano
Oscar Sardella
Irene Zapico

**Matemática instrumental**
Juan Pablo Muszkats
Daniel Ojeda
Jorge Román

**LECTURA CRÍTICA**
Daniel Arroyo

**DEPARTAMENTO DE ARTE**
**Jefe de diagramadores**
Gabriela Falgione
**Diagramación**
Vanesa Chulak
Pablo Romagnolo
**Tratamiento de imágenes**
Liana Agrasar
Nicolás Ammi - Adriana Badariotti

**ILUSTRACIONES**
Martín Melogno - Vladimiro Merino
Sergio Ucedo

**FOTOGRAFÍAS**
Digital Image - Fotopanorama
Tony Stone
Archivo Puerto de Palos

**ARCHIVO PUERTO DE PALOS**
Lidia Chico

**SECRETARÍA EDITORIAL**
Verónica Martínez

**CORRECCIÓN**
Gabriel Valeiras

© 2001 **PUERTO DE PALOS S.A.** Casa de ediciones
Av. Honorio Pueyrredón 571 (1405) Tel./Fax 4902-1093 Líneas rotativas. Buenos Aires - Argentina
ISBN: 987-547-026-0
Queda hecho el depósito que dispone la ley 11.723.
Primera edición: Septiembre de 2001
Impreso en España - Printed in Spain
MELSA, Pinto - Madrid - España
*La reproducción total o parcial de este libro en cualquier forma que sea, idéntica o modificada, escrita en máquina por el sistema "multigraph", mimeógrafo, impreso, etc., no autorizada por los editores, viola derechos reservados.*

POLIMODAL

ESCUELA MEDIA Nº 13
BIBLIOTECA

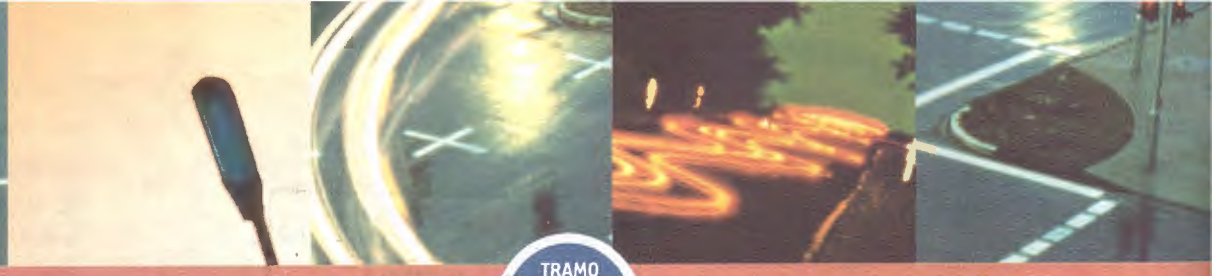
SALA DE LECTURA

# MATEMÁTICA 1

ACTIVA

PUERTO DE PALOS

# ÍNDICE



## TRAMO A — NÚMEROS REALES

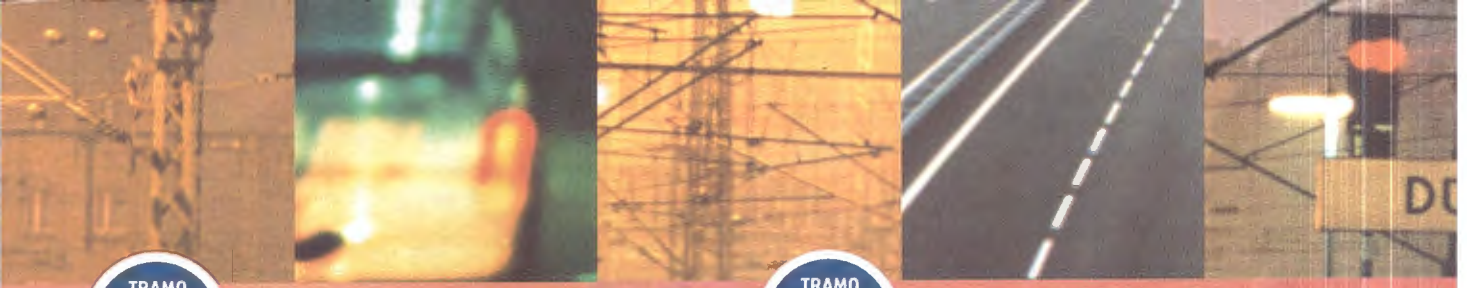

1. El conjunto de los números reales (R). 10
   Ejercitación. 11
2. Operaciones con números racionales. 12
   Ejercitación. 13
3. Ecuaciones e inecuaciones de primer grado. 16
   Ejercitación. 17
4. Módulo de un real. Propiedades. 20
   Ejercitación. 21
5. Ecuaciones de segundo grado. 22
   Ejercitación. 23
6. Ecuaciones e inecuaciones lineales con módulo. 26
   Ejercitación. 27
7. Inecuaciones de segundo grado. 28
   Ejercitación 29
8. Aproximación. Error. 30
   Ejercitación. 31
9. Propiedades de la potenciación y radicación en R. 32
   Ejercitación. 33
10. Números irracionales. Radicales. 34
    Ejercitación. 35
11. Adición y sustracción de radicales. 36
    Ejercitación. 37
12. Multiplicación y división de radicales. 38
    Ejercitación. 39
13. Racionalización de denominadores. 40
    Ejercitación. 41
    Ejercitación final de integración A. 42


## TRAMO B — EXPRESIONES ALGEBRAICAS ENTERAS


14. Expresiones algebraicas. Polinomios. 48
    Ejercitación. 49
15. Adición y sustracción de polinomios. 50
    Ejercitación. 51
16. Multiplicación de polinomios. 52
    Ejercitación. 53
17. División de polinomios. 54
    Ejercitación. 55
18. Regla de Ruffini. Teorema del resto. 56
    Ejercitación. 57
19. Potenciación de polinomios. 58
    Ejercitación. 59
    Ejercitación final de integración B. 60


## TRAMO C — FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS


20. Factor común y por grupos. 66
    Ejercitación. 67
21. Suma y resta de potencias de igual exponente. 68
    Ejercitación. 69
22. Trinomio cuadrado y cuatrinomio cubo perfectos. 70
    Ejercitación. 71
23. Teorema de Gauss. 72
    Ejercitación. 73
24. Casos combinados. 74
    Ejercitación. 75
25. Ecuaciones de grado mayor que dos. 78
    Ejercitación. 79
    Ejercitación final de integración C. 80



## TRAMO D
## EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS


**26.** Expresiones algebraicas fraccionarias. Simplificación. 86
Ejercitación. 87
**27.** Multiplicación y división. 88
Ejercitación. 89
**28.** Adición y sustracción. 90
Ejercitación. 91
**29.** Operaciones combinadas. 94
Ejercitación. 95
**30.** Ecuaciones fraccionarias. 98
Ejercitación. 99
Ejercitación final de integración D. 100


## TRAMO E
## FUNCIÓN AFÍN y SISTEMAS DE ECUACIONES


**31.** Función afín. Ecuación explícita de la recta. 106
Ejercitación. 107
**32.** Perpendicularidad y paralelismo entre rectas. 108
Ejercitación. 109
**33.** Ecuación segmentaria de la recta. 110
Ejercitación. 111
**34.** Distancias en el plano. 114
Ejercitación. 115
**35.** Función valor absoluto. 116
Ejercitación. 117
**36.** Sistemas de ecuaciones lineales I. 118
Ejercitación. 119
**37.** Sistemas de ecuaciones lineales II. 120
Ejercitación. 121
**38.** Sistemas de inecuaciones lineales. 124
Ejercitación. 125
**39.** Programación lineal. 126
Ejercitación. 127
Ejercitación final de integración E. 128

## TRAMO F
## FUNCIÓN CUADRÁTICA


**40.** Funciones cuadráticas. **134**
Ejercitación. **135**
**41.** Gráfica de la parábola. **136**
Ejercitación. **137**
**42.** Posiciones relativas respecto del eje de las abscisas. **140**
Ejercitación. **141**
**43.** Ecuación polinómica, canónica y factorizada. **142**
Ejercitación. **143**
**44.** Máximos y mínimos. Crecimiento y decrecimiento. **146**
Ejercitación. **147**
**45.** Intersección de parábolas, parábolas y rectas. **148**
Ejercitación. **149**
Ejercitación final de integración F. **152**


## TRAMO G
## FUNCIONES POLINÓMICAS Y RACIONALES


**46.** Raíces e intersección con el eje de las abscisas. **158**
Ejercitación. **159**
**47.** Teorema de Bolzano. **162**
Ejercitación. **163**
**48.** Gráfico aproximado de una función polinómica. **164**
Ejercitación. **165**
**49.** Funciones racionales. **168**
Ejercitación. **169**
Ejercitación final de integración G. **170**


## TRAMO H
## TRIGONOMETRÍA


**50.** Sistemas de medición de ángulos. **176**
Ejercitación. **177**
**51.** Razones trigonométricas de un triángulo rectángulo. **178**
Ejercitación. **179**
**52.** Resolución de triángulos rectángulos. **180**
Ejercitación. **181**
**53.** Teoremas del seno y del coseno. **184**
Ejercitación. **185**
**54.** Resolución de triángulos oblicuángulos. **186**
Ejercitación. **187**
**55.** Relaciones entre las razones trigonométricas. **190**
Ejercitación. **191**
**56.** Identidades trigonométricas. **192**
Ejercitación. **193**
Ejercitación final de integración H. **194**

## TRAMO I — FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS


**57.** La circunferencia trigonométrica. **200**
Ejercitación. **201**
**58.** Funciones trigonométricas de un mismo ángulo. **202**
Ejercitación. **203**
**59.** Amplitud, período y ángulo de fase. **206**
Ejercitación. **207**
**60.** Funciones trigonométricas inversas. **210**
Ejercitación. **211**
**61.** Ecuaciones trigonométricas. **212**
Ejercitación. **213**
Ejercitación final de integración I. **216**


## TRAMO J — VECTORES EN EL PLANO


**62.** Vectores en el plano; elementos. **222**
Ejercitación. **223**
**63.** Vectores referidos al origen de coordenadas. **224**
Ejercitación. **225**
**64.** Adición y sustracción de vectores. **226**
Ejercitación. **227**
**65.** Producto de un escalar por un vector. **230**
Ejercitación. **231**
**66.** Módulo de un vector. **234**
Ejercitación. **235**
**67.** Producto escalar de dos vectores. **236**
Ejercitación. **237**
**68.** Ecuación vectorial de la recta. **240**
Ejercitación. **241**
Ejercitación final de integración J. **242**

**CONTROL DE LOS RESULTADOS** **247**

# Estructura del libro

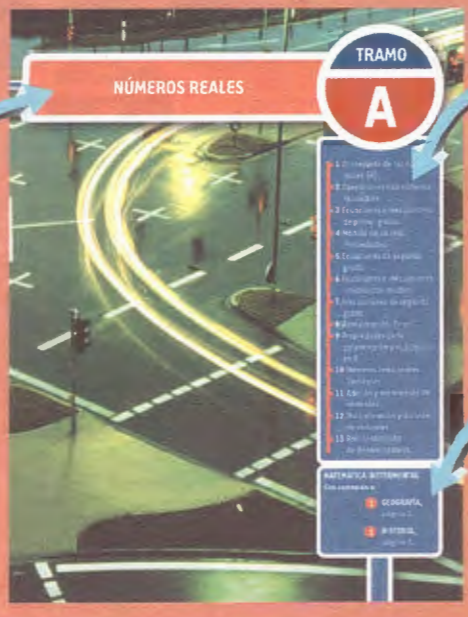
El libro está dividido en dos secciones: **Matemática** y **Matemática instrumental**

## Matemática

**Apertura**

**Bloque conceptual**

Los temas están agrupados en **10 tramos**, designados con letras consecutivas desde la **A** hasta la **J**.




**Contenidos**

Los contenidos curriculares están divididos en **68 temas**, numerados consecutivamente a lo largo del libro.

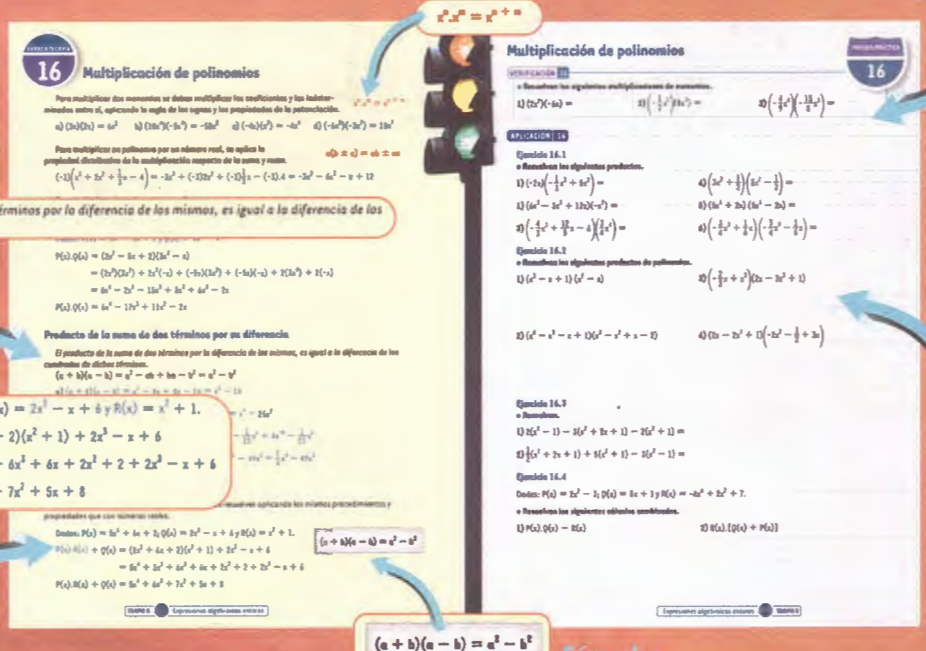
**Conexiones**

Indica qué tema de **Matemática instrumental** se relaciona con el bloque conceptual.

**Temas** Cada tema consta de 2 partes, una teórica y otra práctica.

**Propiedades destacadas**

**Ejercicio de fijación**




**Definiciones**

*El producto de la suma de dos términos por la diferencia de los mismos, es igual a la diferencia de los cuadrados de dichos términos.*

**Ejemplos**

Dados: $P(x) = 5x^2 + 6x + 2$; $Q(x) = 2x^3 - x + 6$ y $R(x) = x^2 + 1$.

$P(x).R(x) + Q(x) = (5x^2 + 6x + 2)(x^2 + 1) + 2x^3 - x + 6$

$= 5x^4 + 5x^2 + 6x^3 + 6x + 2x^2 + 2 + 2x^3 - x + 6$

$P(x).R(x) + Q(x) = 5x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 5x + 8$

**Ejercicios de aplicación**

**Fórmulas**

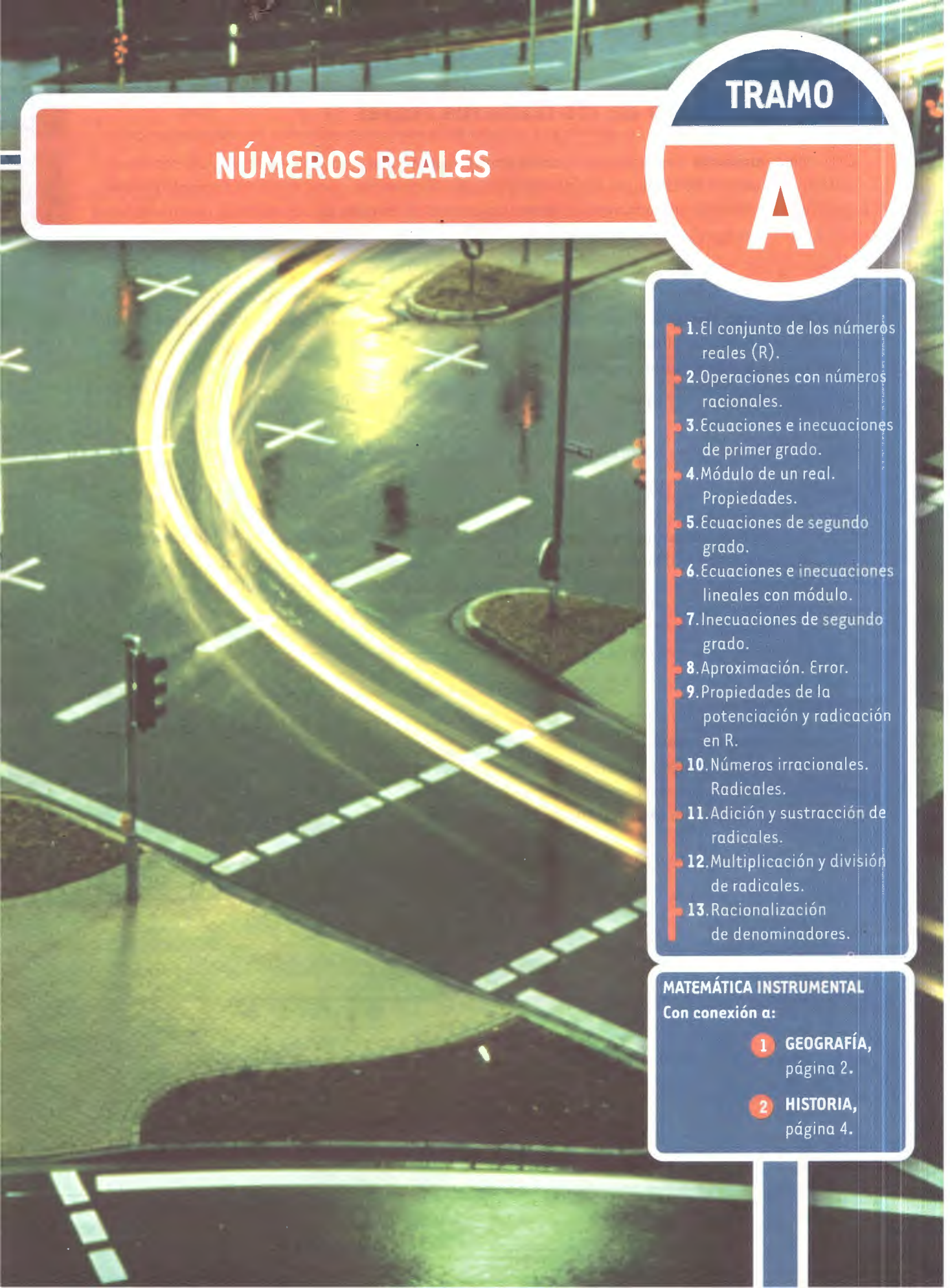
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

**Ejercitación final** Cada tramo contiene 5 páginas finales de ejercitación integradora.

**Control de los resultados** Al final de la sección se encuentran las soluciones de toda la ejercitación propuesta.

## Matemática instrumental

En esta sección, a partir de ejemplos concretos extraídos de la Física, la Economía, la Geografía, la Historia o el Arte, los contenidos de cada bloque conceptual son utilizados como una herramienta para el análisis y la comprensión de conceptos vinculados con otras áreas curriculares.



# NÚMEROS REALES

TRAMO A


1. El conjunto de los números reales (R).
2. Operaciones con números racionales.
3. Ecuaciones e inecuaciones de primer grado.
4. Módulo de un real. Propiedades.
5. Ecuaciones de segundo grado.
6. Ecuaciones e inecuaciones lineales con módulo.
7. Inecuaciones de segundo grado.
8. Aproximación. Error.
9. Propiedades de la potenciación y radicación en R.
10. Números irracionales. Radicales.
11. Adición y sustracción de radicales.
12. Multiplicación y división de radicales.
13. Racionalización de denominadores.


**MATEMÁTICA INSTRUMENTAL**

**Con conexión a:**


1 **GEOGRAFÍA,** página 2.

2 **HISTORIA,** página 4.

PARADA TEÓRICA 1

# El conjunto de los números reales (ℝ)

Los números **racionales** son aquellos que pueden ser expresados como el cociente entre dos números enteros.

Existen dos maneras de escribir un mismo número racional: como fracción o en forma decimal; una y otra designan exactamente al mismo número. La expresión decimal de un número racional tiene un número finito de cifras decimales significativas, o es periódica.

**a)** $\frac{22}{9} = 2,444... = 2,\widehat{4}$ **b)** $\frac{15}{2} = 7,5$ **c)** $-\frac{1}{6} = -0,1666... = -0,1\widehat{6}$ **d)** $-\frac{12}{5} = -2,4$

Los números **irracionales** son aquellos que no pueden ser expresados como un cociente entre dos números enteros, por tener infinitas cifras decimales no periódicas.

Todas las raíces no exactas de base entera son números irracionales.

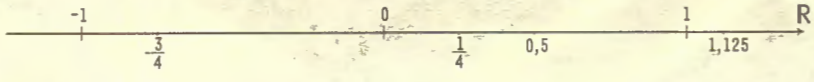
**a)** $\sqrt{2} = 1,414213...$ **b)** $\sqrt{7} = 2,645751...$ **c)** $\sqrt[3]{4} = 1,587401...$ **d)** $\sqrt[5]{18} = 1,782602...$

Hay números irracionales que se determinan a partir de una ley de formación.

**a)** 4,369121518... **b)** 0,123456789... **c)** -3,1122334455... **d)** 25,102030405060...

El conjunto de los números **reales** (ℝ) está formado por los números **racionales** (ℚ) y los **irracionales**.

Los números reales se grafican sobre una recta denominada **recta real**. A un punto de la misma se le asigna el 0, se elige un segmento unidad y se ubican los números restantes. A cada número real le corresponde un punto de la recta y viceversa.



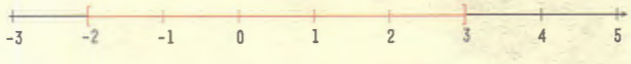

## Intervalos reales

Se denomina **intervalo real** a toda semirrecta o segmento de la recta real.

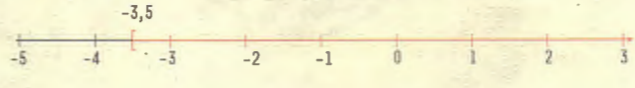
Algebraicamente se designa un intervalo por sus extremos encerrados entre paréntesis o corchetes:

- **paréntesis**, si los extremos no están incluidos (intervalo **abierto**);
- **corchetes**, si se incluyen los extremos (intervalo **cerrado**).

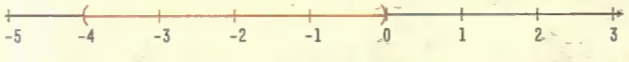
$A = \{x/x \in R \wedge -2 \leq x \leq 3\} = [-2;3]$



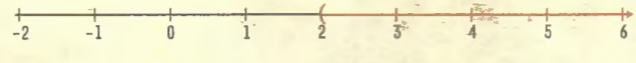

$M = \{x/x \in R \wedge x \geq -3,5\} = [-3,5;+\infty)$




$B = \{x/x \in R \wedge -4 < x < 0\} = (-4;0)$

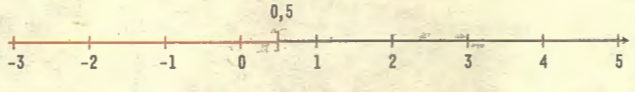



$T = \{x/x \in R \wedge x > 2\} = (2;+\infty)$

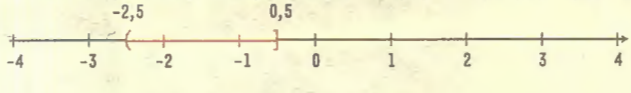



$C = \{x/x \in R \wedge 1 \leq x < 5\} = [1;5)$

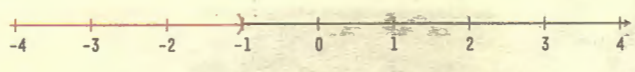
$F = \{x/x \in R \wedge x \leq 0,5\} = (-\infty;0,5]$




$D = \{x/x \in R \wedge -2,5 < x \leq -0,5\} = (-2,5;-0,5]$




$G = \{x/x \in R \wedge x < -1\} = (-\infty;-1)$



# El conjunto de los números reales (ℝ)

PARADA PRÁCTICA 1

## VERIFICACIÓN 1

● **Unan con una flecha cada número real con el intervalo al que pertenece.**

| | |
|---|---|
| **1)** $-\frac{7}{3}$ | **a)** $(0;1)$ |
| **2)** $\sqrt{5}$ | **b)** $(1;3)$ |
| **3)** $\pi$ | **c)** $(-3;-2]$ |
| **4)** $\frac{1}{7}$ | **d)** $(-2;0]$ |
| **5)** $\sqrt[3]{100}$ | **e)** $[3;5]$ |

## APLICACIÓN 1

### Ejercicio 1.1

● **Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda en cada caso.**

**1)** -3 es un número natural. ___

**2)** Todo número natural es entero. ___

**3)** Todo número entero es natural. ___

**4)** Los múltiplos de 11 son números enteros. ___

**5)** El inverso multiplicativo de todo número entero, distinto de cero, es un número entero. ___

**6)** Los números pares son racionales. ___

**7)** Los números impares son irracionales. ___

**8)** La raíz cuadrada de cinco es racional. ___

### Ejercicio 1.2

● **Hallen el punto medio de cada uno de los siguientes intervalos reales.**

**1)** $(2;3)$ **2)** $[3,5;3,7]$ **3)** $(1,1;1,2)$ **4)** $[-1;-0,9]$

### Ejercicio 1.3

● **Escriban cada uno de los siguientes intervalos reales.**

**1)** $B = \{x/x \in R \wedge x < -3,6\} =$

**2)** $C = \{x/x \in R \wedge 4 < x < 9\} =$

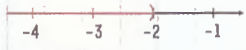
**3)** $E = \{x/x \in R \wedge 0 \leq x \leq 2,4\} =$

**4)** $F = \{x/x \in R \wedge -4,5 \leq x < -1,2\} =$

### Ejercicio 1.4

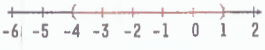
● **Escriban cada uno de los siguientes intervalos representados en rojo.**

**1)**




**2)**

**3)**




**4)**

### Ejercicio 1.5

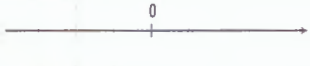
● **Representen cada uno de los intervalos sobre la recta real.**

**1)** $M = (-2,5; 0,5)$

**2)** $T = (-\infty;0,25]$

**3)** $L = (-1,25;0]$

**4)** $K = \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$




INVENTARIO 35611/02

PARADA TEÓRICA 2

# Operaciones con números racionales

Al efectuar la división no exacta de dos números enteros, puede suceder que:

• **el resto de la división sea cero**; en ese caso el cociente es una expresión decimal con un número finito de cifras decimales (expresiones decimales finitas).

**a)** $\frac{3}{4} = 3:4 = 0{,}75$ **b)** $\frac{11}{5} = 11:5 = 2{,}2$ **c)** $-\frac{1}{8} = -1:8 = -0{,}125$

• **el resto nunca se anule**; necesariamente se repite y al repetirse también lo hacen las cifras decimales del cociente, determinando el período (expresiones decimales periódicas).

**a)** $\frac{1}{3} = 1:3 = 0{,}\widehat{3}$ **b)** $-\frac{3}{11} = -3:11 = -0{,}\widehat{27}$ **c)** $\frac{1}{45} = 1:45 = 0{,}0\widehat{2}$

Para transformar una expresión decimal periódica en fracción, se escribe en el numerador de la misma el número decimal, sin la coma, menos la parte no periódica y en el denominador, tantos 9 como cifras decimales periódicas tenga la expresión, seguido de tantos ceros como cifras decimales no periódicas contenga.

**a)** $2{,}\widehat{3} = \frac{23-2}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$ **b)** $-15{,}\widehat{2} = -\frac{152-15}{9} = -\frac{137}{9}$ **c)** $4{,}\widehat{12} = \frac{412-4}{99} = \frac{408}{99} = \frac{136}{33}$

**d)** $0{,}0\widehat{5} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$ **e)** $-0{,}4\widehat{6} = -\frac{46-4}{90} = -\frac{42}{90} = -\frac{7}{15}$ **f)** $3{,}21\widehat{5} = \frac{3.215-321}{900} = \frac{2.894}{900} = \frac{1.447}{450}$

Una operación donde aparezca una expresión decimal periódica conviene resolverla en forma fraccionaria.

**a)** $0{,}4 \cdot \frac{7}{2} - 3^{-1} - \sqrt{0{,}\widehat{4}} =$

$\frac{4}{10} \cdot \frac{7}{2} - \frac{1}{3} - \sqrt{\frac{4}{9}} =$

$\frac{7}{5} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$

**c)** $(-0{,}3)^2 - 4:0{,}25 + \frac{1}{5}:\sqrt{0{,}25} =$

$0{,}09 - 16 + 0{,}2:0{,}5 =$

$0{,}09 - 16 + 0{,}4 = -15{,}51$

**b)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} - 0{,}\widehat{3}(1-0{,}4) + \sqrt[3]{-0{,}008} =$

$\frac{9}{4} - \frac{3}{9} \cdot 0{,}6 + (-0{,}2) =$

$\frac{9}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10} - \frac{2}{10} =$

$\frac{9}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = \frac{37}{20}$

**d)** $\frac{0{,}02.15}{0{,}\widehat{1}} + \frac{\sqrt[3]{1-0{,}875}}{2^{-3}} =$

$\frac{0{,}3}{\frac{1}{9}} + \frac{\sqrt[3]{0{,}125}}{\frac{1}{8}} =$

$\frac{3}{10} \cdot 9 + \frac{0{,}5}{0{,}125} =$

$2{,}7 + 4 = 6{,}7$

# Operaciones con números racionales

PARADA PRÁCTICA 2

## VERIFICACIÓN 2

● **Resuelvan en forma decimal los siguientes cálculos.**

**1)** $4{,}78 + 3{,}28 =$

**2)** $2{,}1 - 0{,}42 =$

**3)** $0{,}2(-0{,}55) =$

**4)** $-12 : 0{,}4 =$

## APLICACIÓN 2

### Ejercicio 2.1

● **Completen cada uno de los siguientes cálculos.**

**1)** $0{,}4 - \quad = -0{,}1$

**2)** $-0{,}5 + \quad = 1$

**3)** $\frac{7}{4} : \quad = -\frac{1}{4}$

**4)** $-2. \quad = -0{,}06$

**5)** $\frac{1}{5} \cdot \quad = 3$

**6)** $1 : \quad = 0{,}01$

**7)** $-\frac{25}{9} \cdot \quad = -\frac{5}{3}$

**8)** $-0{,}2. \quad = 0{,}8$

**9)** $8{,}2 : \quad = 2{,}05$

**10)** $-3{,}2 : \quad = 4$

**11)** $-0{,}1. \quad = -0{,}03$

**12)** $0{,}6 + \quad = \frac{1}{2}$

### Ejercicio 2.2

● **Resuelvan los siguientes cálculos.**

**1)** $\frac{3}{4} \cdot 2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) - 1{,}8 =$

**2)** $6{,}2 - 3{,}4 : (-2) + \frac{3}{2} =$

**3)** $(1 - 0{,}7)0{,}2 + 1{,}8 : 2 - 1 =$

**4)** $\frac{2}{5} : \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} - 1 =$

**5)** $0{,}7 : (-2) + 0{,}1(-0{,}1) + \frac{1}{4} =$

**6)** $10 : \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) + 2(-1{,}4 + 0{,}2) =$

### Ejercicio 2.3

● **Escriban en forma decimal cada una de las siguientes fracciones.**

**1)** $\frac{17}{5} =$

**2)** $\frac{32}{3} =$

**3)** $\frac{2}{45} =$

**4)** $\frac{11}{15} =$

**5)** $\frac{38}{11} =$

**6)** $\frac{101}{330} =$

### Ejercicio 2.4

● **Escriban como fracción irreducible cada una de las siguientes expresiones decimales.**

**1)** $0{,}\widehat{8} =$

**2)** $2{,}\widehat{5} =$

**3)** $3{,}\widehat{15} =$

**4)** $0{,}\widehat{18} =$

**5)** $2{,}5\widehat{2} =$

**6)** $5{,}2\widehat{4} =$

# Operaciones con números racionales

## Ejercicio 2.5

- **Resuelvan los siguientes cálculos.**

**1)** $(1,3 - 0,\widehat{3}) : \left(-\frac{1}{6}\right) - 0,2 =$

**2)** $-0,\widehat{2} \cdot \frac{9}{5} + 1,\widehat{3} : 0,8\widehat{3} =$

**3)** $(1,\widehat{5} + 0,\widehat{1})0,6 - 1,0\widehat{2} =$

**4)** $(3,4\widehat{2}.0,0\widehat{75} + 1,\widehat{2})0,75 =$

## Ejercicio 2.6

- **Calculen las siguientes potencias.**

**1)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} =$

**2)** $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3} =$

**3)** $0,1^2 =$

**4)** $(-0,2)^3 =$

**5)** $(0,3)^4 =$

**6)** $(-0,\widehat{3})^2 =$

**7)** $(0,\widehat{2})^3 =$

**8)** $(-1,\widehat{2})^2 =$

## Ejercicio 2.7

- **Calculen las siguientes raíces.**

**1)** $\sqrt{-\frac{1}{8}} =$

**2)** $\sqrt{\frac{121}{100}} =$

**3)** $\sqrt{0,09} =$

**4)** $\sqrt[3]{-0,027} =$

**5)** $\sqrt[3]{0,000\overline{064}} =$

**6)** $\sqrt{0,\widehat{4}} =$

**7)** $\sqrt{1,\widehat{7}} =$

**8)** $\sqrt{0,69\widehat{4}} =$

## Ejercicio 2.8

**Resuelvan los siguientes cálculos combinados.**

**1)** $\left(0,3 + \frac{5}{6}\right) : 0,1 - 5\sqrt{\frac{81}{16}} =$

**2)** $\sqrt{\left(\frac{4}{3} - 1\right)0,3 + (0,1.7 - 3,1)0,1\hat{6}} =$

**3)** $\left(-\frac{9}{7} \cdot 0,2\bar{5} + \frac{2}{7}\right)(0,6 + 0,3^2) =$

**4)** $2\sqrt{2,7} - 1,3^{-1}.0,04 + 2^{-2} =$

**5)** $\sqrt[3]{1 - \frac{7}{8}} + (2.0,3 + \sqrt{0,0\bar{4}})^{-1} - \frac{3}{2} =$

**6)** $0,08\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4 \sqrt[3]{8} + \sqrt{\frac{25}{64}}\right] - 0,26 =$

PARADA TEÓRICA 3

# Ecuaciones e inecuaciones de primer grado

Una **identidad** es una igualdad que se verifica para todos los valores posibles de la/s variable/s.

**a)** $m + m = 2m$ **b)** $x + y = y + x$ **c)** $bn + an = (a + b)n$ **d)** $0{,}2x + 3 - x + 1{,}4 = -0{,}8x + 4{,}4$

Una **ecuación** es una igualdad que se verifica para uno, algunos o ningún valor de la/s variable/s.

**a)** $x + 2 = 0$ **b)** $6 - 3x = 5$ **c)** $x + 4 = x - 3$ **d)** $x + 2y + z = 0$ **e)** $5 - x = 3 + 2x^2 - 8$

Resolver una ecuación es encontrar, si exisen, el o los valores de las variables que verifican la igualdad planteada. Dichos valores determinan el **conjunto solución** de la ecuación.

En este capítulo se trabajará con ecuaciones con una sola variable o incógnita.

Una ecuación de primer grado o lineal es aquella cuya forma general es: $\mathbf{ax + b = 0}$, siendo a y b números reales y $a \neq 0$.

**a)** $-3\left(2x - \frac{5}{6}\right) = \left(-\frac{5}{4}x + 3\right) : 0{,}5$

$$-6x + \frac{5}{2} = -\frac{5}{2}x + 6$$

$$-6x + \frac{5}{2}x = 6 - \frac{5}{2}$$

$$-\frac{7}{2}x = \frac{7}{2}$$

$$x = -1$$

**b)** $2x - 3 + 3\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}\right) = x - \frac{5}{4}(x - 1)$

$$2x - 3 + 2x - \frac{1}{2} = x - \frac{5}{4}x + \frac{5}{4}$$

$$4x + \frac{1}{4}x = \frac{5}{4} + \frac{7}{2}$$

$$\frac{17}{4}x = \frac{19}{4} \Rightarrow x = \frac{19}{17}$$

Las **desigualdades** que contienen variables se llaman inecuaciones.

En este capítulo se trabajará con inecuaciones de primer grado con una incógnita.

Resolver una inecuación es encontrar todos los valores de la incógnita que la verifican, y el conjunto solución es un intervalo real o el conjunto vacío.

Una inecuación se resuelve como una ecuación, salvo en el caso en que se divida o multiplique a ambos miembros por un número negativo, lo que invierte el sentido de la desigualdad.

**a)** $-3x > 2$

$$-3x : (-3) < 2 : (-3)$$

$$x < -\frac{2}{3}$$

$$S = \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$$

**b)** $-\frac{1}{5}x \leq -4$

$$-\frac{1}{5}x(-5) \geq -4(-5)$$

$$x \geq 20$$

$$S = [20; +\infty)$$

**c)** $-7x < 3$

$$-7x : (-7) > 3 : (-7)$$

$$x > -\frac{3}{7}$$

$$S = \left(-\frac{3}{7}; +\infty\right)$$

**d)** $-\frac{1}{4}x \geq -1$

$$-\frac{1}{4}x(-4) \leq -1(-4)$$

$$x \leq 4$$

$$S = (-\infty; 4]$$

**e)** $3x - \frac{8}{3} < 4 - x$

$$3x + x < 4 + \frac{8}{3}$$

$$4x < \frac{20}{3}$$

$$x < \frac{20}{3} : 4$$

$$x < \frac{5}{3}$$

$$S = \left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$$

**f)** $2{,}3x + 5{,}4 - x > (6 - 3x)0{,}1$

$$2{,}3x + 5{,}4 - x > 0{,}6 - 0{,}3x$$

$$1{,}3x + 0{,}3x > 0{,}6 - 5{,}4$$

$$1{,}6x > -4{,}8$$

$$x > -4{,}8 : 1{,}6$$

$$x > -3$$

$$S = (-3; +\infty)$$

**g)** $-\frac{3}{5}(10x + 5) \geq \left(1 - \frac{5}{2}x\right) : 0{,}5$

$$-6x - 3 \geq 2 - 5x$$

$$-6x + 5x \geq 2 + 3$$

$$-x \geq 5$$

$$x \leq -5$$

$$S = (-\infty; -5]$$

# Ecuaciones e inecuaciones de primer grado

PARADA PRÁCTICA 3

## VERIFICACIÓN 3

- **Marquen con una X las igualdades que son identidades.**

**1)** $5x - x = 4x$ ☐ **2)** $x + 1 = x + 2$ ☐ **3)** $2(x + 1) = 2x + 1$ ☐ **4)** $-(x - 5) = -x + 5$ ☐

## APLICACIÓN 3

### Ejercicio 3.1

- **Resuelvan las siguientes ecuaciones.**

**1)** $\frac{3}{2}x - 2{,}5 = 5 + \frac{1}{4}x$

**2)** $4{,}3 + 3{,}2x = 5{,}2x + 7{,}3$

**3)** $\frac{2}{5}x - 1 = \frac{x - 2}{4}$

**4)** $\frac{3}{10}(-6x + 4) = \frac{1}{5}(2x + 0{,}5)$

**5)** $\frac{-6x + 4}{10} = \frac{x - 1}{3} + 1$

**6)** $\frac{3 - 24x}{10} - \frac{1 - 2x}{2} = -\frac{1}{10}(3x - 4)$

# Ecuaciones e inecuaciones de primer grado

## Ejercicio 3.2

- **Planteen y resuelvan cada uno de los siguientes problemas.**

**1)** ¿Cuál es el número cuya tercera parte es $\frac{2}{5}$?

**2)** ¿Cuál es el número cuyo duplo más su cuarta parte es $\frac{9}{5}$?

**3)** La mitad de un número más la tercera parte de su consecutivo es 7. ¿De qué número se trata?

**4)** La cuarta parte de la diferencia entre un número y su mitad es 2. ¿Cuál es el número?

**5)** La tercera parte de la suma de dos números consecutivos es igual a la mitad del mayor de ellos. ¿Cuáles son los números?

**6)** La quinta parte de un número es igual a la séptima parte de su consecutivo aumentada en 1. ¿Cuál es el número?

## Ejercicio 3.3

**Resuelvan las siguientes inecuaciones.**

**1)** $2x - 3 < 5$

**2)** $12 - 3x \geq -6$

**3)** $2(x - 3) \leq 5$

**4)** $12 - x < 6 + x$

**5)** $-2x + \frac{4}{5} \leq 0{,}5x - 2{,}2$

**6)** $(-0{,}2 - x) : 0{,}1 \geq 0{,}4 - 5x$

**7)** $\frac{1}{6} - 3\left(-\frac{2}{9}x + 1\right) < -\left(\frac{1}{10} - x\right) - \frac{7}{3}x$

**8)** $1{,}6 - 2x > (0{,}4 - x) : 0{,}2$

PARADA TEÓRICA 4

# Módulo de un real. Propiedades

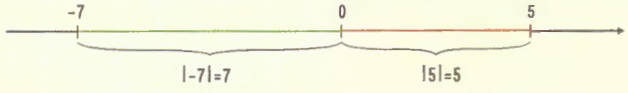
*El **módulo** o **valor absoluto** de un número real es su distancia al cero sobre la recta real.*

Para todo número real x, su módulo se expresa: $|x|$.

$$\forall x \in \mathbb{R}: |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**a)** $|5| = 5$

**b)** $|-7| = -(-7) = 7$




## Propiedades

**1)** $|x| \geq 0$

**a)** $|-6,5| = -(-6,5) = 6,5$ **b)** $\left|\frac{7}{8}\right| = \frac{7}{8}$ **c)** $|0| = 0$

**2)** $|x| = |-x|$

**a)** $|0,02| = |-0,02| = -(-0,02) = 0,02$ **b)** $|132| = |-132| = -(-132) = 132$

**3)** $|x + y| \leq |x| + |y|$

**a)** $|8 + 4,1| \leq |8| + |4,1|$
$|12,1| \leq 8 + 4,1$
$12,1 \leq 12,1$

**b)** $|1,4 + (-2)| \leq |1,4| + |-2|$
$|-0,6| \leq 1,4 + 2$
$0,6 \leq 3,4$

**c)** $|-5 + (-1,4)| \leq |-5| + |-1,4|$
$|-6,4| \leq 5 + 1,4$
$6,4 \leq 6,4$

**4)** $|x.y| = |x|.|y|$

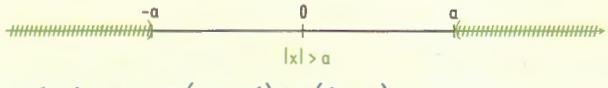
**a)** $|6.(-5)| = |6|.|-5|$
$|-30| = 6.5$
$30 = 30$

**b)** $|8.3| = |8|.|3|$
$|24| = 8.3$
$24 = 24$

**c)** $|-0,1.(-9,5)| = |-0,1|.|-9,5|$
$|0,95| = 0,1.9,5$
$0,95 = 0,95$

Para entender mejor las propiedades que siguen, se representan los siguientes intervalos reales:

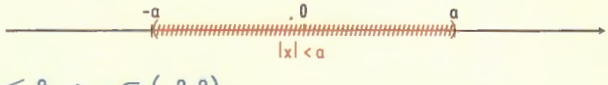
**5)** $|x| > a \wedge a > 0 \Rightarrow x > a \vee x < -a \Rightarrow x \in (-\infty;-a) \cup (a,+\infty)$




**a)** $|x| > 6 \Rightarrow x > 6 \vee x < -6 \Rightarrow x \in (-\infty;-6) \cup (6;+\infty)$

**b)** $|x| \geq 2,5 \Rightarrow x \geq 2,5 \vee x \leq -2,5 \Rightarrow x \in (-\infty;-2,5] \cup [2,5;+\infty)$

**6)** $|x| < a \wedge a > 0 \Rightarrow -a < x < a \Rightarrow x \in (-a;a)$




**a)** $|x| < 8 \Rightarrow -8 < x < 8 \Rightarrow x \in (-8;8)$

**b)** $|x| \leq \frac{9}{2} \Rightarrow -\frac{9}{2} \leq x \leq \frac{9}{2} \Rightarrow x \in \left(-\frac{9}{2};\frac{9}{2}\right)$

# Módulo de un real. Propiedades

PARADA PRÁCTICA 4

## VERIFICACIÓN 4

● **Calculen los siguientes módulos.**

**1)** $|2,3| =$ **2)** $|-0,5| =$ **3)** $|1 - 5| =$ **4)** $|-4 - 5| =$

## APLICACIÓN 4

### Ejercicio 4.1

● **Completen con $>$, $<$ o $=$ según corresponda en cada caso.**

**1)** $|-6| __ |6|$

**2)** $|5 + 7| __ |5| + |7|$

**3)** $|-3 - (-10)| __ |-3| + |-10|$

**4)** $|-1,2.0,5| __ |-1,2|.|0,5|$

**5)** $|-11 - 4| __ |-11| - |4|$

**6)** $|-5 + 2| __ |-5| + |2|$

**7)** $|3,5 + (-2)| __ |3,5| + |-2|$

**8)** $|5,1 - (-2,8)| __ |5,1| - |-2,8|$

### Ejercicio 4.2

● **Escriban el conjunto de valores que verifican las siguientes igualdades.**

**1)** $|x| = 15,4$

**2)** $|x| = 0$

**3)** $|x| < 3$

**4)** $|x| > 6,2$

**5)** $|x| \leq 0,1$

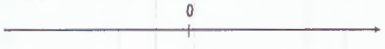
**6)** $|x| \geq \pi$

### Ejercicio 4.3

● **Grafiquen sobre la recta real los conjuntos de números reales que cumplen cada una de las siguientes condiciones.**

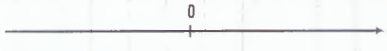
**1)** $|x| = \frac{3}{2} \wedge x < 0$

**2)** $|x| > 6 \wedge x > 0$

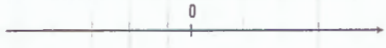



**3)** $|x| < 3 \wedge x \geq 0$

**4)** $|x| \leq 2,5 \wedge x \neq 0$




**5)** $|x| \geq 1,2 \wedge x < 0$




**6)** $|x| \leq 1 \wedge x > 0$

### Ejercicio 4.4

● **Calculen todos los números que verifican cada una de las siguientes igualdades.**

**1)** $|x| + 5 = 7$

**2)** $\frac{1}{5}|x| + 2 = \frac{13}{5}$

**3)** $0,8 - |x| = 0,3$

**4)** $1,5 - 3|x| = -1,5$

PARADA TEÓRICA 5

# Ecuaciones de segundo grado

La forma general de las ecuaciones de segundo grado es:

$$ax^2 + bx + c = 0 \ \wedge \ a \in R \wedge b \in R \wedge c \in R \wedge a \neq 0$$

## Ecuaciones incompletas

**1)** Si $b = 0$, la ecuación de segundo grado es incompleta de la forma $ax^2 + c = 0$.
Para resolver este tipo de ecuaciones se despeja el valor de x, teniendo en cuenta que: $\sqrt{x^2} = |x|$

**a)** $x^2 - 9 = 0$
$x^2 = 9$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$
$|x| = 3$
$x_1 = 3 \wedge x_2 = -3$

**b)** $-2x^2 + 50 = 0$
$-2x^2 = -50$
$x^2 = 25$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$
$|x| = 5$
$x_1 = 5 \wedge x_2 = -5$

**c)** $\frac{1}{3}x^2 - 12 = 0$
$\frac{1}{3}x^2 = 12$
$x^2 = 36$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{36}$
$|x| = 6$
$x_1 = 6 \wedge x_2 = -6$

**2)** Si $c = 0$, la ecuación de segundo grado es incompleta de la forma $ax^2 + bx = 0$.
Para resolver este tipo de ecuaciones, se debe tener en cuenta que: $m.n = 0 \Rightarrow m = 0 \vee n = 0$

**a)** $2x^2 - 3x = 0$
$x(2x - 3) = 0$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_2 - 3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

**b)** $-3x^2 + x = 0$
$x(-3x + 1) = 0$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -3x_2 + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

## Ecuaciones completas

Si la ecuación es **completa**, o sea que ninguno de sus coeficientes es igual a cero, los valores de x que la satisfacen se encuentran aplicando una fórmula, en la cual estos intervienen.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \boxed{x_1;x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

**a)** $2x^2 + x - 10 = 0 \Rightarrow a = 2 \ \wedge \ b = 1 \ \wedge \ c = -10$

$$x_1;x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.2(-10)}}{2.2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 80}}{4} = \frac{-1 \pm 9}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{-1 + 9}{4} = 2 \wedge x_2 = \frac{-1 - 9}{4} = -\frac{5}{2}$$

**b)** $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \ \wedge \ b = -2 \ \wedge \ c = 1$

$$x_1;x_2 = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.1}}{2.1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$$

# Ecuaciones de segundo grado

PARADA PRÁCTICA 5

## VERIFICACIÓN 5

- **Resuelvan las siguientes ecuaciones.**

**1)** $x^2 - 49 = 0$

**2)** $x^2 + \frac{2}{5}x = 0$

## APLICACIÓN 5

### Ejercicio 5.1

- **Resuelvan las siguientes ecuaciones.**

**1)** $x - (1 - 3x^2) = 2x^2 - (-x - 3)$

**3)** $x(1 + x) - \frac{1}{2}(x - 2) = 10 + \frac{1}{2}x$

**2)** $x(5 - 2x) = 3\left(-\frac{2}{3} + 2x\right) + 2$

**4)** $1 - 4(x^2 - x) = (2x - 1)(x - 1)$

# Ecuaciones de segundo grado

## Ejercicio 5.2

● **Resuelvan las siguientes ecuaciones.**

**1)** $2x^2 + x - 6 = 0$

**2)** $4x^2 - 11x - 3 = 0$

**3)** $x^2 - 6x + 9 = 0$

**4)** $6x^2 + 17x + 5 = 0$

**5)** $0,2x^2 + 0,4x - 0,6 = 0$

**6)** $x^2 + 4x + 1 = 4 - x^2 + 3x$

**7)** $x(x + 2) - 2x(x - 0,5) + 8 = x^2 - 1$

**8)** $x(2x + 6) = x^2 + x - 4$

## Ejercicio 5.3

**● Planteen y resuelvan los siguientes problemas.**

**1)** ¿Cuál es el número, distinto de cero, que sumado a su cuadrado es igual a su cuádruple?

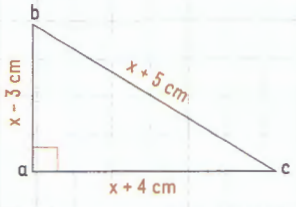
**2)** El doble del cuadrado de un número entero, sumado a su triplo, es igual a 65. ¿Cuál es el número?

**3)** Hallar un número, distinto de cero, tal que si se le resta su cuadrado, el resultado es exactamente su cuadrado.

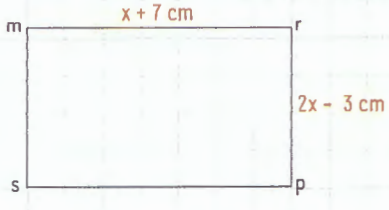
## Ejercicio 5.4

**● Calculen el perímetro de cada una de las siguientes figuras.**

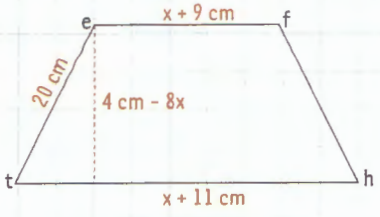
**1)** Triángulo rectángulo $\hat{abc}$.




**2)** Rectángulo mrps, cuya superficie es de 84 $cm^2$.




**3)** Trapecio isósceles efht, cuya superficie es de 160 $cm^2$.



PARADA TEÓRICA

# 6 Ecuaciones e inecuaciones lineales con módulo

Para resolver ecuaciones o inecuaciones lineales en las que aparecen módulos que incluyen a la incógnita, se deben tener presentes tanto la definición de este concepto como sus propiedades.

## Ecuaciones

**a)** $|x + 3| = 7$ ⟶ Debe eliminarse el módulo, aplicando la definición.

$x + 3 \geq 0 \Rightarrow \mathbf{x \geq -3}$ ∨ $x + 3 < 0 \Rightarrow \mathbf{x < -3}$

$x + 3 = 7 \Rightarrow \mathbf{x = 4}$ ∨ $-x - 3 = 7 \Rightarrow \mathbf{x = -10}$

**b)** $3|2 - 3x| + 2 = x + 5$ ⟶ Debe eliminarse el módulo, aplicando la definición.

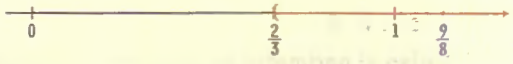
$2 - 3x \geq 0 \Rightarrow \mathbf{x \leq \frac{2}{3}}$ ∨ $2 - 3x < 0 \Rightarrow \mathbf{x > \frac{2}{3}}$

$3(\mathbf{2 - 3x}) + 2 = x + 5$ ∨ $3(\mathbf{-2 + 3x}) + 2 = x + 5$

$6 - 9x + 2 = x + 5$ $-6 + 9x + 2 = x + 5$

$-10x = -3$ $8x = 9$

$\mathbf{x = \frac{3}{10}}$ $\mathbf{x = \frac{9}{8}}$




## Inecuaciones

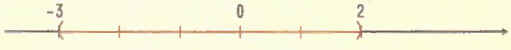
**a)** $|2x + 1| < 5$ ⟶ Debe eliminarse el módulo, aplicando la definición.

$2x + 1 \geq 0 \Rightarrow \mathbf{x \geq -\frac{1}{2}}$ ∨ $2x + 1 < 0 \Rightarrow \mathbf{x < -\frac{1}{2}}$

$2x + 1 < 5 \Rightarrow \mathbf{x < 2}$ ∨ $-2x - 1 < 5 \Rightarrow \mathbf{x > -3}$

$x \geq -\frac{1}{2} \wedge x < 2 \Rightarrow \mathbf{-\frac{1}{2} \leq x < 2}$ $x < -\frac{1}{2} \wedge x > -3 \Rightarrow \mathbf{-3 < x < -\frac{1}{2}}$

La solución es la unión de los intervalos: $S = \left(-3;-\frac{1}{2}\right) \cup \left[-\frac{1}{2};2\right) = \mathbf{(-3;2)}$




**b)** $2|x - 1| - 2 > 5 - x$ ⟶ Debe eliminarse el módulo, aplicando la definición.

$x - 1 \geq 0 \Rightarrow \mathbf{x \geq 1}$ ∨ $x - 1 < 0 \Rightarrow \mathbf{x < 1}$

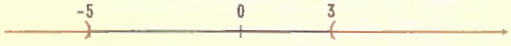
$2(x - 1) - 2 > 5 - x$ ∨ $2(-x + 1) - 2 > 5 - x$

$2x - 2 - 2 > 5 - x$ ∴ $-2x + 2 - 2 > 5 - x$

$3x > 9 \Rightarrow \mathbf{x > 3}$ $-x > 5 \Rightarrow \mathbf{x < -5}$

$x \geq 1 \wedge x > 3 \Rightarrow \mathbf{x > 3}$ $x < 1 \wedge x < -5 \Rightarrow \mathbf{x < -5}$

La solución es la unión de los intervalos: $S = \mathbf{(-\infty;-5) \cup (3;+\infty)}$



# Ecuaciones e inecuaciones lineales con módulo

PARADA PRÁCTICA 6

## VERIFICACIÓN 6

- **Hallen el conjunto solución.**

**1)** $|3 - x| = 5$

**2)** $|3 - x| \leq 5$

## APLICACIÓN 6

### Ejercicio 6.1

- **Resuelvan las siguientes ecuaciones.**

**1)** $3|x - 1| + 2 = 5 - x$

**2)** $2x + 1 = 5|4 - 2x| - 10$

### Ejercicio 6.2

- **Resuelvan las siguientes inecuaciones.**

**1)** $2 - |x + 4| > 7 + 2x$

**2)** $2 - 3(2x - 4) \leq 3 - |2x + 1|$

PARADA TEÓRICA

7

# Inecuaciones de segundo grado

**1)** Inecuaciones de la forma: $ax^2 + c \geq 0 \vee ax^2 + c \leq 0$.

**a)** $x^2 - 9 \geq 0$

$x^2 \geq 9$

$|x| \geq 3$

$x \geq 3 \vee x \leq -3$

$S = (-\infty;-3] \cup [3;+\infty)$

**b)** $x^2 - 4 \leq 0$

$x^2 \leq 4$

$|x| \leq 2$

$-2 \leq x \leq 2$

$S = [-2;2]$

**c)** $x^2 + 3 > 0$

$x^2 > -3 \Rightarrow S = R$

Cualquier número elevado al cuadrado es mayor que -3.

**d)** $x^2 + 1 < 0$

$x^2 < -1 \Rightarrow S = \varnothing$

No existe ningún número que elevado al cuadrado sea menor que -1.

**2)** Inecuaciones de la forma: $ax^2 + bx \geq 0 \vee ax^2 + bx \leq 0$.

$m.n \geq 0 \Rightarrow (m \geq 0 \wedge n \geq 0) \vee (m \leq 0 \wedge n \leq 0)$ $\quad$ $m.n \leq 0 \Rightarrow (m \geq 0 \wedge n \leq 0) \vee (m \leq 0 \wedge n \geq 0)$

**a)** $3x^2 - 2x \geq 0 \Rightarrow x(3x - 2) \geq 0$

$(x \geq 0 \wedge 3x - 2 \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge 3x - 2 \leq 0)$

$\left(x \geq 0 \wedge x \geq \frac{2}{3}\right) \vee \left(x \leq 0 \wedge x \leq \frac{2}{3}\right)$

$x \geq \frac{2}{3} \quad \vee \quad x \leq 0$

$S = (-\infty;0] \cup \left[\frac{2}{3};+\infty\right)$

**b)** $x^2 + 2x \leq 0 \Rightarrow x(x + 2) \leq 0$

$(x \geq 0 \wedge x + 2 \leq 0) \vee (x \leq 0 \wedge x + 2 \geq 0)$

$(x \geq 0 \wedge x \leq -2) \vee (x \leq 0 \wedge x \geq -2)$

$\varnothing \quad -2 \leq x \leq 0$

$S = [-2;0]$

**3)** Inecuaciones de la forma: $ax^2 + bx + c \geq 0 \vee ax^2 + bx + c \leq 0$.

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

**a)** $x^2 + x - 6 \geq 0$

$x_{1;}x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-6)}}{2.1}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$

$= \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = 2 \wedge x_2 = -3$

$x^2 + x - 6 \geq 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 3) \geq 0$

$(x - 2 \geq 0 \wedge x + 3 \geq 0) \vee (x - 2 \leq 0 \wedge x + 3 \leq 0)$

$(x \geq 2 \wedge x \geq -3) \vee (x \leq 2 \wedge x \leq -3)$

$x \geq 2 \quad \vee \quad x \leq -3$

$S = (-\infty;-3] \cup [2;+\infty)$

**b)** $x^2 + 6x - 16 < 0$

$x_{1;}x_2 = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4.1.(-16)}}{2.1}$

$= \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2}$

$= \frac{-6 \pm 10}{2} \Rightarrow x_1 = 2 \wedge x_2 = -8$

$x^2 + 6x - 16 < 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 8) < 0$

$(x - 2 > 0 \wedge x + 8 < 0) \vee (x - 2 < 0 \wedge x + 8 > 0)$

$(x > 2 \wedge x < -8) \vee (x < 2 \wedge x > -8)$

$\varnothing \quad -8 < x < 2$

$S = (-8;2)$

# Inecuaciones de segundo grado

PARADA PRÁCTICA 7

## VERIFICACIÓN 7

● **Unan con una flecha cada inecuación con el conjunto solución correspondiente.**

| | |
|---|---|
| **1)** $x^2 > 1$ | **a)** $\mathbb{R}$ |
| **2)** $x^2 < 1$ | **b)** $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$ |
| **3)** $x^2 > -1$ | **c)** $(1;+\infty)$ |
| **4)** $x^2 < -1$ | **d)** $\varnothing$ |
| | **e)** $(-1;1)$ |
| | **f)** $(-\infty;-1)$ |

## APLICACIÓN 7

### Ejercicio 7.1

● **Resuelvan las siguientes inecuaciones.**

**1)** $3x^2 - 12 < 0$

**2)** $x^2 - 3x \geq 0$

**3)** $-x^2 + 9 \leq 0$

**4)** $(x + 2)^2 < 4$

**5)** $x(x + 1) - 25 > x$

**6)** $(x + 2)(x + 1) > 2$

**7)** $2x^2 - 4x - 6 \geq 0$

**8)** $x(2x - 3) < -1$

PARADA TEÓRICA

# 8 Aproximación. Error

## Aproximación

Cuando se trabaja con números que tienen muchas o infinitas cifras decimales, se realizan **aproximaciones**. No se opera con el valor exacto; se comete un pequeño error que es aceptado por razones de orden práctico.

Para calcular el promedio final de las calificaciones de un alumno en una asignatura determinada, se suman las notas obtenidas en los tres trimestres y se las divide por 3.

Los promedios finales se **aproximan por redondeo** a dos decimales.

| Asignatura | 1.° trimestre | 2.° trimestre | 3.° trimestre | Promedio final |
|---|---|---|---|---|
| Matemática | 5 | 7 | 7 | 6,33 |
| Idioma extranjero | 8 | 8 | 10 | 8,67 |

Para aproximar por **redondeo** se considera la cifra siguiente a la última que se va a dejar; si es mayor o igual que 5, se suma uno a dicha última cifra y si es menor, se deja igual.

$\frac{5+7+7}{3} = \frac{19}{3} = 6,3333... \cong 6,33 \ (\varepsilon < 0,01)$ $\quad \frac{8+8+10}{3} = \frac{26}{3} = 8,6666... \cong 8,67 \ (\varepsilon < 0,01)$

**a)** $\sqrt{2} = 1,4142135... \cong 1,414 \ (\varepsilon < 0,001)$

**b)** $\sqrt{5} = 2,2360679... \cong 2,2361 \ (\varepsilon < 0,0001)$

**c)** $\pi = 3,1415926... \cong 3,142 \ (\varepsilon < 0,001)$

**d)** $\frac{1}{7} = 0,142857... \cong 0,14 \ (\varepsilon < 0,01)$

Otra manera de aproximar es por **truncamiento**, que consiste en eliminar directamente las cifras que no desean considerarse.

**a)** $\sqrt{7} = 2,6457513... \cong 2,64 \ (\varepsilon < 0,01)$

**b)** $\pi = 3,1415926... \cong 3,141 \ (\varepsilon < 0,001)$

## Error

Se denomina **error absoluto** $(\varepsilon_a)$ al módulo de la diferencia entre el valor de cada medición $(x_i)$ y el valor más probable $(\bar{x})$.

$$\varepsilon_a = |x_i - \bar{x}|$$

El valor más probable es el promedio de los valores obtenidos.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

El error relativo es el cociente entre el error absoluto y el valor más probable.

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{\bar{x}}$$

El error porcentual es el error relativo multiplicado por 100.

$$\varepsilon_{\%} = \varepsilon_r \cdot 100$$

# Aproximación. Error

PARADA PRÁCTICA 8

## VERIFICACIÓN 8

- Calculen el error absoluto de cada una de las siguientes aproximaciones.

**1)** $0,1254 \cong 0,12$ **2)** $1,7528 \cong 1,753$ **3)** $-3,2601 \cong -3,3$

## APLICACIÓN 8

### Ejercicio 8.1

- Completen el siguiente cuadro aproximando por truncamiento.

| | Valor real | $\varepsilon < 0,1$ | $\varepsilon < 0,01$ | $\varepsilon < 0,001$ | $\varepsilon < 0,0001$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1) | $\sqrt{5}$ | | | | |
| 2) | $0,12\widehat{5}$ | | | | |
| 3) | $\frac{3}{7}$ | | | | |

### Ejercicio 8.2

- Completen el siguiente cuadro aproximando por redondeo.

| | Valor real | $\varepsilon < 0,1$ | $\varepsilon < 0,01$ | $\varepsilon < 0,001$ | $\varepsilon < 0,0001$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1) | $\sqrt{15}$ | | | | |
| 2) | $1,38\widehat{7}$ | | | | |
| 3) | $\frac{1}{11}$ | | | | |

### Ejercicio 8.3

- Calculen el error porcentual de cada una de las siguientes aproximaciones por redondeo.

**1)** $\frac{101}{30}$ $\varepsilon < 0,001$ **2)** $\sqrt{\frac{3}{4}}$ $\varepsilon < 0,01$

### Ejercicio 8.4

- Calculen el error porcentual de cada una de las siguientes aproximaciones.

**1)** $23° 12' 18'' \cong 24°$ 2) $\operatorname{sen} 42° \cong \frac{7}{10}$

PARADA TEÓRICA

9

# Propiedades de la potenciación y radicación en $\mathbb{R}$

## Propiedades de la potenciación

- *Potencia de exponente cero.* $a^0 = 1 \Leftrightarrow a \neq 0$
- *Potencia de exponente negativo.* $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \Leftrightarrow a \neq 0$
- *Potencia de otra potencia.* $(a^n)^m = a^{n.m}$
- *Producto de potencias de igual base.* $a^n.a^m = a^{n+m}$
- *Cociente de potencias de igual base.* $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- *Distributividad respecto de la multiplicación.* $(a.b)^n = a^n.b^n$
- *Distributividad respecto de la división.* $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

## Propiedades de la radicación

La radicación se puede expresar como una potencia de exponente fraccionario: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

**a)** $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$ **b)** $\sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}}$ **c)** $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ **d)** $\sqrt[4]{\frac{1}{x^5}} = x^{-\frac{5}{4}}$

Las propiedades de la radicación son análogas con las de la potenciación.

- *Raíz de raíz.* $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n.m}} = \sqrt[m.n]{a}$
- *Distributividad respecto de la multiplicación.* $\sqrt[n]{a.b} = (a.b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}.b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
- *Distributividad respecto de la división.* $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- *Simplificación de índices.* $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m:r}{n:r}} = \sqrt[n:r]{a^{m:r}} \Leftrightarrow r \neq 0$

**a)** $\sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5}$ **b)** $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$ **c)** $\sqrt[12]{81} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[3]{3}$

- *Eliminación del radical.*

$\sqrt[n]{a^n} = a \Leftrightarrow$ n es impar

$\sqrt[n]{a^n} = |a| \Leftrightarrow$ n es par

**a)** $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = |5| = 5$ **b)** $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = |2| = 2$ **c)** $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$ **d)** $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$

- *Amplificación de índices.* $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m.p}{n.p}} = \sqrt[n.p]{a^{m.p}} \Leftrightarrow p \neq 0$

**a)** $\sqrt{6} = \sqrt[2.2]{6^{1.2}} = \sqrt[4]{6^2} = \sqrt[4]{36}$ **b)** $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3.3]{2^{2.3}} = \sqrt[9]{2^6} = \sqrt[9]{64}$ **c)** $\sqrt[5]{x^3} = \sqrt[5.4]{x^{3.4}} = \sqrt[20]{x^{12}}$

# Propiedades de la potenciación y radicación en $\mathbb{R}$

PARADA PRÁCTICA 9

## VERIFICACIÓN 9

● **Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda en cada caso.**

**1)** $a^3.a^2 = a^6$ ⌊ ⌋

**2)** $m.m.m = 3m$ ⌊ ⌋

**3)** $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ⌊ ⌋

**4)** $(b.b^2)^3 = b^9$ ⌊ ⌋

**5)** $\sqrt{a^3} = a^{\frac{2}{3}}$ ⌊ ⌋

**6)** $\sqrt{x^2} = x$ ⌊ ⌋

## APLICACIÓN 9

### Ejercicio 9.1

● **Hallen la mínima expresión, aplicando las propiedades de la potenciación.**

**1)** $(a.a^2)^2 : a^5 =$

**2)** $(x^5)^3 : (x.x)^2 =$

**3)** $(b.b^{-2})^3.b^2 =$

**4)** $(a^2.b)^4.(a.b)^{-2} =$

**5)** $\left(\frac{m}{n^3}\right)^5 \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{-3} =$

**6)** $(x^{-2}.y^3)^3.(x^4.y^{-7}) =$

### Ejercicio 9.2

● **Hallen la mínima expresión, aplicando las propiedades de la radicación.**

**1)** $\sqrt{a^3}\sqrt{a}\sqrt{a^4} =$

**2)** $\sqrt[6]{x^4}\sqrt[9]{x^6}\sqrt[15]{x^{10}} =$

**3)** $\sqrt[9]{\frac{x^{12}}{y^{15}}} =$

**4)** $\sqrt[3]{x^2.z^5}\sqrt[3]{x^7.z} =$

### Ejercicio 9.3

● **Resuelvan aplicando propiedades.**

**1)** $\frac{2^5}{2^3} + 3^{-1} - \sqrt{2}\sqrt{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} =$

**2)** $3^{-2} \cdot \frac{1}{3^3} \cdot 3^6 + \sqrt{\sqrt{\frac{625}{81}}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} =$

**3)** $\frac{4}{2^4} - \frac{1}{3^{-1}} + \frac{2^3.4}{32} - \sqrt{\frac{3^7}{3^3}} =$

**4)** $\frac{\sqrt{10}\sqrt{6}}{\sqrt{15}} - \left(\frac{1}{2}\right)^4 : 2^{-2} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{8}\sqrt{8}}{27}} =$

PARADA TEÓRICA 10

# Números irracionales. Radicales

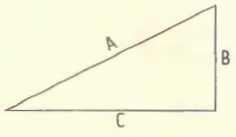
Los números irracionales son aquellos que no pueden ser expresados como el cociente entre dos números enteros y tienen infinitas cifras decimales no periódicas.

Como ya se vio, las raíces no exactas de números racionales son números irracionales.

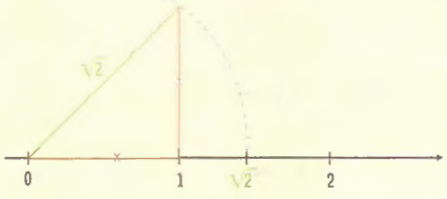
Se denomina **radical** a la raíz indicada de un número o de una expresión, siempre que esta tenga solución real.

## Representación gráfica

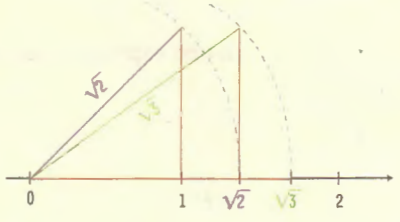
Cada número irracional tiene asociado un punto sobre la recta real.
Para representar ese punto sobre la recta numérica, si el irracional es de la forma $\sqrt{a}$, se debe recurrir al teorema de Pitágoras: $A^2 = B^2 + C^2$



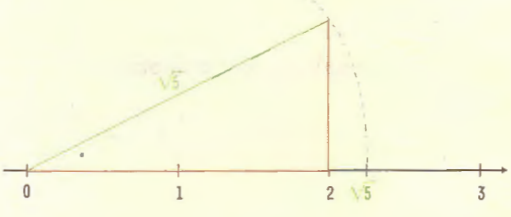

**a)** Representación de $\sqrt{2}$.
Se determina sobre la recta un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos midan 1.
El valor de la hipotenusa es: $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$




**b)** Representación de $\sqrt{3}$.
Se determina sobre la recta un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 1 y $\sqrt{2}$, respectivamente.
El valor de la hipotenusa es: $\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$




**c)** Representación de $\sqrt{5}$.
Se determina sobre la recta un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 1 y 2, respectivamente.
El valor de la hipotenusa es: $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$




De este modo se puede representar cualquier raíz cuadrada de un número natural, siempre que se elijan convenientemente los catetos del triángulo rectángulo.

## Extracción de factores de un radical

Existen factores, dentro de un radical, que pueden ser extraídos si el exponente de los mismos es mayor o a lo sumo igual que el índice de la raíz. Para ello deben aplicarse las propiedades de la potenciación y radicación.

**a)** $\sqrt[3]{16x^7} = \sqrt[3]{2^4.x^6.x} = \sqrt[3]{2^3.2x^6.x} = \sqrt[3]{2^3}\,\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{x^6}\,\sqrt[3]{x} = 2\sqrt[3]{2}\,x^2.\sqrt[3]{x} = 2x^2.\sqrt[3]{2x}$

**b)** $\sqrt{75x^3.y^4.z} = \sqrt{5^2.3x^2.xy^4.z} = \sqrt{5^2}\,\sqrt{x^2}\,\sqrt{y^4}\,\sqrt{3xz} = 5xy^2.\sqrt{3xz}$

**c)** $\sqrt[5]{\frac{128}{243}y^5} = \sqrt[5]{\frac{2^5.2^2}{3^5}y^5} = \sqrt[5]{\frac{2^5}{3^5}}\,\sqrt[5]{y^5}\,\sqrt[5]{2^2} = \frac{\sqrt[5]{2^5}}{\sqrt[5]{3^5}}\sqrt[5]{y^5}\,\sqrt[5]{2^2} = \frac{2}{3}y\sqrt[5]{4}$

**d)** $\sqrt{\frac{8x^2}{y^3}} = \sqrt{\frac{2^2.x^2}{y^2}}\sqrt{\frac{2}{y}} = \frac{2x}{y}\sqrt{\frac{2}{y}}$

# Números irracionales. Radicales

PARADA PRÁCTICA 10

**VERIFICACIÓN 10**

- **Representen en la recta real los números $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$ y $\sqrt{21}$.**

**APLICACIÓN 10**

## Ejercicio 10.1

- **Simplifiquen los índices de cada una de las siguientes raíces.**

**1)** $\sqrt{8} =$

**2)** $\sqrt{0,27} =$

**3)** $\sqrt[3]{10.000} =$

**4)** $\sqrt[4]{x^{21}} =$

**5)** $\sqrt{16x^3} =$

**6)** $\sqrt{9a^2.b^6.c} =$

**7)** $\sqrt[3]{-8x^6.y^5} =$

**8)** $\sqrt[3]{\frac{81m^{11}.n^{16}}{125}} =$

**9)** $\sqrt[4]{\frac{32x^{10}}{81y^{20}}} =$

**10)** $\sqrt[3]{\frac{0,064a^8.b^{10}}{c^{21}}} =$

PARADA TEÓRICA 11

# Adición y sustracción de radicales

## Radicales semejantes

*Dos radicales son **semejantes** cuando tienen igual índice y el mismo radicando.*

Términos con radicales semejantes: $\sqrt{3}$ y $5\sqrt{3}$; $-2\sqrt[3]{2}$ y $4\sqrt[3]{2}$; $3\sqrt[4]{x^3}$ y $-8\sqrt[4]{x^3}$.

Términos con radicales no semejantes: $-\sqrt[3]{7}$ y $2\sqrt{7}$; $5\sqrt{3}$ y $7\sqrt{2}$; $-4\sqrt[4]{3}$ y $9\sqrt[3]{4}$.

## Adición y sustracción de radicales

Solo es posible sumar o restar términos que contienen radicales semejantes.

**a)** $3\underline{\sqrt{2}} + 5\underline{\sqrt{2}} - \underline{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(3 + 5 - 1) = 7\sqrt{2}$

**b)** $5\underline{\sqrt{3}} - 2\underline{\sqrt{5}} + 3\underline{\sqrt{3}} + 7\underline{\sqrt{5}} = \sqrt{3}(5 + 3) + \sqrt{5}(-2 + 7) = 8\sqrt{3} + 5\sqrt{5}$

Existen casos en los cuales ciertos radicales son semejantes luego de llevarlos a su mínima expresión.

**a)** $3\sqrt{2} - 5\sqrt{32} + 7\sqrt{8} - 9\sqrt{50} = 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2^5} + 7\sqrt{2^3} - 9\sqrt{5^2.2}$
$= 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2^4}\sqrt{2} + 7\sqrt{2^2}\sqrt{2} - 9\sqrt{5^2}\sqrt{2}$
$= 3\sqrt{2} - 5.2^2\sqrt{2} + 7.2\sqrt{2} - 9.5\sqrt{2}$
$= \sqrt{2}(3 - 20 + 14 - 45) = -48\sqrt{2}$

**b)** $4\sqrt{3} - 6\sqrt[4]{25} - 8\sqrt{27} + \sqrt{20} = 4\sqrt{3} - 6\sqrt[4]{5^2} - 8\sqrt{3^2.3} + \sqrt{2^2.5}$
$= 4\sqrt{3} - 6\sqrt{5} - 8.3\sqrt{3} + 2\sqrt{5}$
$= \sqrt{3}(4 - 24) + \sqrt{5}(-6 + 2) = -20\sqrt{3} - 4\sqrt{5}$

## Multiplicación de radicales de igual índice

La operatoria con radicales cumple con las siguientes propiedades.

- Propiedad distributiva de la multiplicación y división respecto de la suma y resta:

$a(b \pm c) = (b \pm c)a = ab \pm ac \ \wedge \ (b \pm c) : a = b : a \pm c : a$

- Cuadrado de un binomio y diferencia de cuadrados:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \ \wedge \ (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

**a)** $\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{8}) = \sqrt{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{8} = \sqrt{4} + \sqrt{16} = 2 + 4 = 6$

**b)** $(\sqrt{75} - \sqrt{27}) : \sqrt{3} = \sqrt{75} : \sqrt{3} - \sqrt{27} : \sqrt{3} = \sqrt{25} - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$

**c)** $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 3 - 2\sqrt{15} + 5 = 8 - 2\sqrt{15}$

**d)** $(\sqrt{8} + \sqrt{3})(\sqrt{8} - \sqrt{3}) = (\sqrt{8})^2 - (\sqrt{3})^2 = 8 - 3 = 5$

# Adición y sustracción de radicales

PARADA PRÁCTICA 11

**VERIFICACIÓN 11**

- **Sumen y resten los siguientes radicales semejantes.**

**1)** $\sqrt{2} + \sqrt{2} - 5\sqrt{2} =$

**2)** $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{x} =$

**APLICACIÓN 11**

## Ejercicio 11.1

- **Resuelvan las siguientes adiciones y sustracciones.**

**1)** $\sqrt{a} - 2\sqrt{b} + \sqrt{a} - \sqrt{b} =$

**2)** $\sqrt{9x} - \sqrt{25x} + \sqrt{49x} =$

**3)** $3\sqrt{18} - 11\sqrt{2} + 2\sqrt{50} =$

**4)** $\sqrt[4]{9y^8} + \sqrt[6]{27y^{12}} =$

**5)** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{16}{27}} - \frac{5}{3}\sqrt[3]{54} + 5\sqrt[3]{\frac{2}{125}} =$

**6)** $\sqrt{81a^3} + \sqrt{9a^3} - \sqrt{25a^3} =$

## Ejercicio 11.2

- **Resuelvan las siguientes multiplicaciones.**

**1)** $\left(5 + \sqrt{\frac{3}{4}}\right)\left(5 - \sqrt{\frac{3}{4}}\right) =$

**2)** $\sqrt[4]{2a^2}\sqrt[4]{ab}\sqrt[4]{2ab} =$

**3)** $2\sqrt[5]{ab} : \left(-3\sqrt[5]{\frac{1}{a^2}}\right) =$

**4)** $\sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{24}) + \sqrt{98} =$

**5)** $\sqrt{6}(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 =$

PARADA TEÓRICA

# 12 Multiplicación y división de radicales

Para efectuar cualquier multiplicación o división de radicales, estos deben tener el mismo índice.

Para que los índices de dos o más radicales sean iguales se debe calcular el **MCM** de los índices de los radicales dados, obteniéndose así el **mínimo común índice**.

Reducir a mínimo común índice los siguientes radicales:

**a)** $\sqrt{5}$ y $\sqrt[3]{7}$ ⟶ MCM(2;3) = 6; ambos radicales deben tener índice **6**.

$\sqrt{5} = \sqrt[2.3]{5^{1.3}} = \sqrt[6]{125}$ y $\sqrt[3]{7} = \sqrt[3.2]{7^{1.2}} = \sqrt[6]{49}$

**b)** $\sqrt[4]{a^3}$ y $\sqrt[8]{x}$ ⟶ MCM(4;8) = 8; ambos radicales deben tener índice **8**.

$\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[4.2]{a^{3.2}} = \sqrt[8]{a^6}$ y $\sqrt[8]{x}$

## Multiplicación y división de radicales de distinto índice

Para multiplicar o dividir radicales de distinto índice, se los debe reducir a mínimo común índice y luego aplicar las propiedades recíprocas de las distributivas de la radicación respecto de la multiplicación y división.

$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c}\ldots\sqrt[n]{d} = \sqrt[n]{abc\ldots d} \quad \wedge \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

**a)** $\sqrt{2}\,\sqrt[3]{2} = \sqrt[2.3]{2^{1.3}}\,\sqrt[3.2]{2^{1.2}} = \sqrt[6]{2^3}\,\sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{2^3.2^2} = \sqrt[6]{2^5}$

**b)** $\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[3.4]{x^{2.4}}\,\sqrt[4.3]{x^{3.3}} = \sqrt[12]{x^8}\,\sqrt[12]{x^9} = \sqrt[12]{x^8.x^9} = \sqrt[12]{x^{17}} = \sqrt[12]{x^{12}.x^5} = x\sqrt[12]{x^5}$

**c)** $\frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[6]{2^5}} = \frac{\sqrt[4.3]{2^{3.3}}}{\sqrt[6.2]{2^{5.2}}} = \frac{\sqrt[12]{2^9}}{\sqrt[12]{2^{10}}} = \sqrt[12]{\frac{2^9}{2^{10}}} = \sqrt[12]{\frac{1}{2}}$

**d)** $\frac{\sqrt[4]{m^3}}{\sqrt[5]{m^2}} = \frac{\sqrt[4.5]{m^{3.5}}}{\sqrt[5.4]{m^{2.4}}} = \frac{\sqrt[20]{m^{15}}}{\sqrt[20]{m^8}} = \sqrt[20]{\frac{m^{15}}{m^8}} = \sqrt[20]{m^7}$

## Operaciones combinadas

Para resolver un cálculo combinando con radicales, se deben aplicar los mismos procedimientos y propiedades que para un cálculo numérico.

**a)** $\frac{\sqrt{2}\,\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt[2.6]{2^{1.6}}\,\sqrt[3.4]{2^{2.4}}}{\sqrt[4.3]{2^{1.3}}} = \frac{\sqrt[12]{2^6}\,\sqrt[12]{2^8}}{\sqrt[12]{2^3}} = \sqrt[12]{\frac{2^6.2^8}{2^3}} = \sqrt[12]{\frac{2^{14}}{2^3}} = \sqrt[12]{2^{11}}$

**b)** $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[10]{x}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[10]{x}} \cdot \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{\sqrt[2.10]{x^{1.10}}\,\sqrt[4.5]{x^{1.5}}}{\sqrt[10.2]{x^{1.2}}\,\sqrt[4.5]{x^{3.5}}} = \frac{\sqrt[20]{x^{10}.x^5}}{\sqrt[20]{x^2.x^{15}}} = \frac{\sqrt[20]{x^{15}}}{\sqrt[20]{x^{17}}} = \sqrt[20]{\frac{x^{15}}{x^{17}}} = \sqrt[20]{\frac{1}{x^2}} = \sqrt[10]{\frac{1}{x}}$

**c)** $\sqrt{x\sqrt{x}}\,\sqrt[3]{x} = \sqrt{x}\,\sqrt{\sqrt{x}}\,\sqrt[3]{x} = \sqrt{x}\,\sqrt[4]{x}\,\sqrt[3]{x} = \sqrt[12]{x^6}\,\sqrt[12]{x^3}\,\sqrt[12]{x^4} = \sqrt[12]{x^{13}} = \sqrt[12]{x^{12}.x} = x\sqrt[12]{x}$

# Multiplicación y división de radicales

PARADA PRÁCTICA 12

## VERIFICACIÓN 12

- **Reduzcan a mínimo común índice los siguientes radicales.**

1) $\sqrt[3]{x^2}$ y $\sqrt{x}$

2) $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[4]{2}$

## APLICACIÓN 12

### Ejercicio 12.1

- **Realicen las siguientes multiplicaciones y divisiones.**

1) $\sqrt[5]{3x^3}\ \sqrt{3x} =$

2) $\sqrt{m}\ \sqrt[3]{m^2}\ \sqrt[4]{m^3} =$

3) $\sqrt[3]{ab^2}\ \sqrt[5]{a^2.b^3} =$

4) $\sqrt{4x}\ \sqrt[3]{4x^2}\ \sqrt[6]{16x^3} =$

5) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}} =$

6) $\dfrac{\sqrt[3]{9x}}{\sqrt[4]{27x^2}} =$

### Ejercicio 12.2

- **Resuelvan cada uno de los siguientes cálculos combinados.**

1) $\dfrac{\sqrt{14}\ \sqrt{6}}{\sqrt{15}\ \sqrt{10}} =$

2) $\dfrac{\sqrt{x}\ \sqrt{\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}} =$

3) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} =$

4) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt{2}}}\ \sqrt{2} =$

PARADA TEÓRICA 13

# Racionalización de denominadores

Racionalizar el denominador de una fracción es transformarlo en un número racional; por lo tanto, siempre que en el mismo aparezcan radicales irracionales se debe hallar una fracción equivalente a la dada con denominador racional.

**Primer caso:** en el denominador hay un único radical.

**a)** Racionalizar $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**b)** Racionalizar $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{5}} = \frac{3}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{3\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2.5}} = \frac{3\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{3\sqrt[3]{25}}{5}$$

**c)** Racionalizar $\frac{2}{\sqrt[4]{x^3.y^2}}$

$$\frac{2}{\sqrt[4]{x^3.y^2}} = \frac{2}{\sqrt[4]{x^3.y^2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{xy^2}}{\sqrt[4]{xy^2}} = \frac{2\sqrt[4]{xy^2}}{\sqrt[4]{x^3.y^2.xy^2}} = \frac{2\sqrt[4]{xy^2}}{\sqrt[4]{x^4.y^4}} = \frac{2\sqrt[4]{xy^2}}{xy}$$

**Segundo caso:** el denominador es una suma o resta de uno o dos radicales de índice 2.

Para racionalizar este tipo de expresiones, se debe aplicar el producto de una suma de dos términos por su diferencia: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

**a)** Racionalizar: $\frac{4}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

$$\frac{4}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{4(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{4(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{4(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{5 - 3} = \frac{4(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2} = 2(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$$

**b)** Racionalizar: $\frac{\sqrt{2} - 1}{4 - \sqrt{6}}$

$$\frac{\sqrt{2} - 1}{4 - \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{4 - \sqrt{6}} \cdot \frac{4 + \sqrt{6}}{4 + \sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2} - 1)(4 + \sqrt{6})}{(4 - \sqrt{6})(4 + \sqrt{6})} = \frac{4\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{6} - 4 - \sqrt{6}}{4^2 - (\sqrt{6})^2}$$

$$= \frac{4\sqrt{2} + \sqrt{12} - 4 - \sqrt{6}}{16 - 6} = \frac{4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 4 - \sqrt{6}}{10} = \frac{2}{5}\sqrt{2} + \frac{1}{5}\sqrt{3} - \frac{2}{5} - \frac{1}{10}\sqrt{6}$$

# Racionalización de denominadores

PARADA PRÁCTICA 13

## VERIFICACIÓN 13

- **Marquen con una X las expresiones con denominadores irracionales.**

1) $\frac{1}{\sqrt{9}}$ ☐ 2) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ☐ 3) $\frac{\sqrt{5}}{\pi}$ ☐ 4) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ☐ 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ☐

## APLICACIÓN 13

### Ejercicio 13.1

- **Racionalicen los denominadores de las siguientes expresiones.**

1) $\frac{10}{\sqrt[3]{2}} =$

2) $\frac{2x}{3\sqrt[3]{x}} =$

3) $\frac{4}{\sqrt[9]{256y^8}} =$

4) $\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt[3]{2x}} =$

5) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} =$

6) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} =$

7) $\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} =$

8) $\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} =$

9) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} =$

10) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} =$

# TRAMO A: ejercitación final

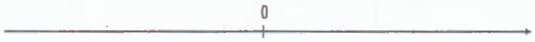
INTEGRACIÓN A

## Ejercicio A.1

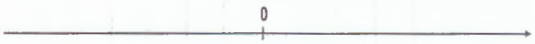
- **Resuelvan y representen las siguientes operaciones entre intervalos reales.**

**1)** $(-\infty;-5) \cup (-10;0] =$

**2)** $(-2;0] \cup (0;5] =$

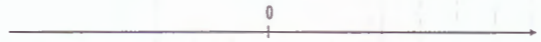



**3)** $(-\infty;1] \cap (7;+\infty) =$

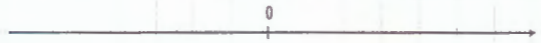



**4)** $(-5;3] \cap (-1;8) =$

**5)** $(-\infty;2] \cup (2;+\infty) =$




**6)** $[-5;+\infty] \cap (-\infty;4) =$




## Ejercicio A.2

- **Resuelvan las siguientes operaciones.**

**1)** $(0,\widehat{3} - 2)0,6 + \sqrt[3]{-0,008} - 1,2 : 3 =$

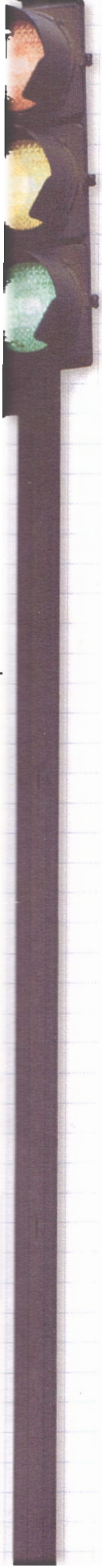
**2)** $\sqrt{(1 - 2 : 0,5)0,\widehat{4} + 1,\widehat{4}} + 2^{-2} =$

**3)** $0,04\left(\frac{1}{2} - 0,3\right)^{-1} - \sqrt{0,2.0,\widehat{5}^{-1}} + \frac{3}{4} =$

**4)** $(0,\widehat{2} + 0,6) : 0,8\widehat{2} - \sqrt[3]{\left(4 - \frac{7}{2}\right)0,25} + 2^{-3} =$

**5)** $\sqrt{(2,\widehat{3} - 1)^{-2} + 1} - \frac{3}{5} : 0,8 + \left(\frac{3}{2} - 1,2\right)^2 .3,\widehat{3} =$

**6)** $\left(1 - \sqrt{0,3\widehat{5}.5}\right)^{-1} + \frac{\sqrt{0,04}}{2} - \left(2^2 - \frac{1}{3}\right)\frac{5}{22} =$



PARADA PRÁCTICA A

## Ejercicio A.3

- **Resuelvan cada una de las siguientes ecuaciones.**

**1)** $2x - \frac{1}{5} = -\frac{3}{10}(x - 1) + 0{,}2$

**2)** $\frac{2x - 1}{3} + x = \frac{x - 3}{2} - 1$

**3)** $5|2x - 1| + 1 = 6$

**4)** $2 - 3|x + 1| = 4x - 5$

**5)** $(x - 1)(x + 3) = x - 3$

**6)** $(x + 2)^2 - 10 = 4x + 6$

**7)** $(x - 1)(x + 1) = 5 - x$

**8)** $(3x - 1)(x + 4) = 2(3x - 1)$

# TRAMO A: ejercitación final

## Ejercicio A.4

- **Resuelvan cada una de las siguientes inecuaciones.**

**1)** $2|x + 1| < 6$

**2)** $4 + |2x - 3| \geq 7$

**3)** $5|1 - x| > 2x - 3$

**4)** $(x - 1)^2 < 5 - 2x$

**5)** $(x - 2)(x + 5) \geq 2(3x - 5)$

**6)** $x(x + 4) < 2x + 3$

**7)** $3(x^2 - 3) > 2(4x - 3)$

**8)** $3(x^2 - 1) + 2x \leq (x + 1)(x - 2) + 1$

## Ejercicio A.5

- **Hallen la mínima expresión aplicando las propiedades de la potenciación.**

1) $\frac{(x^2.x)^2.x^5}{(x^2)^2.x^3} =$

2) $\frac{(m^3.h^5)^5.m^2}{(m^2.h^3)^4} =$

3) $\frac{\sqrt[3]{x^5}}{x^3.\sqrt{x}} =$

4) $\sqrt{\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}} =$

## Ejercicio A.6

- **Simplifiquen los índices de las siguientes raíces.**

1) $\sqrt[4]{4x^8.y^{12}} =$

2) $\sqrt[8]{\frac{64a^{14}}{9c^8}} =$

## Ejercicio A.7

- **Extraigan todos los factores posibles de cada uno de los siguientes radicales.**

1) $\sqrt{32a^4.x^{21}} =$

2) $\sqrt[3]{\frac{81x^{14}}{m^{15}}} =$

## Ejercicio A.8

- **Realicen las siguientes sumas algebraicas.**

1) $\sqrt{75} + \sqrt{27} - \sqrt{48} =$

2) $\sqrt{x^5} + x\sqrt{x^3} + \sqrt{\sqrt{x^{10}}} =$

3) $5\sqrt[3]{128a} + 3\sqrt[6]{4a^2} - 4\sqrt[3]{16a} =$

4) $4\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{81} + 5\sqrt[9]{8} + \sqrt[3]{24} =$

# TRAMO A: ejercitación final

## Ejercicio A.9

- **Realicen las siguientes operaciones, racionalizando cuando sea posible.**

1) $\dfrac{\sqrt[3]{4x}\,\sqrt{2x}}{\sqrt[6]{8x^2}} =$

2) $\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}}{\sqrt[4]{8}} =$

3) $\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{15}-\sqrt{6})}{\sqrt{2}} =$

4) $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\,\sqrt[6]{x^5}} =$

## Ejercicio A.10

- **Racionalicen las siguientes expresiones.**

1) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} =$

2) $\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{2})^2}{\sqrt{2x}} =$

3) $\dfrac{\sqrt[4]{3m}}{\sqrt[3]{9m}} =$

4) $\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} =$

# TRAMO B

# EXPRESIONES ALGEBRAICAS ENTERAS


14. Expresiones algebraicas. Polinomios.
15. Adición y sustracción de polinomios.
16. Multiplicación de polinomios.
17. División de polinomios.
18. Regla de Ruffini. Teorema del resto.
19. Potenciación de polinomios.


**MATEMÁTICA INSTRUMENTAL**

**Con conexión a:**


3 **ECONOMÍA,** página 6.

PARADA TEÓRICA

# 14 Expresiones algebraicas. Polinomios

*Una **expresión algebraica** es una combinación cualquiera y finita de números, de letras, o de números y letras, ligados entre sí con la adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.*

**a)** $2x + 3^4$ **b)** $5x^3 + 6x - \frac{1}{3}$ **c)** $x^2 + \sqrt{3x}$ **d)** $\frac{x^5 - 4}{x^2}$ **e)** $\sqrt{2}x - \frac{2}{5}x^4$

Los números son los coeficientes, y las letras, las variables o indeterminadas.
En este capítulo se estudiarán expresiones algebraicas con una sola variable (x).

Si la variable no está afectada por una raíz o como divisor, las expresiones algebraicas son enteras y se denominan **polinomios**.
Los ejemplos c) y d) no son polinomios; sí lo son a), b) y e).

Según la cantidad de términos, un polinomio se denomina:

**monomio**, si tiene un solo término $\left(\frac{1}{2}x^5\right)$;

**binomio**, si tiene dos términos $(4x^2 + 5)$;

**trinomio**, si tiene tres términos $(3x - 8 + x^3)$ y

**cuatrinomio**, si tiene cuatro términos $(2x^5 - 2x + 7 - x^2)$.

*Los términos que tienen la misma variable y exponente son **semejantes**.*

Los términos $4x^2$, $-\frac{1}{2}x^2$ y $x^2$ son semejantes.

*Se denomina **grado** al mayor exponente que tiene la variable de los términos con coeficientes no nulos de un polinomio.*

**a)** $P(x) = 7x + 6x^2 - x^5$; grado: 5. **b)** $Q(x) = 4 - x + x^3$; grado: 3. **c)** $T(x) = 5$; grado 0.

*Se llama **coeficiente principal** al que multiplica a la variable de mayor exponente.*

**a)** $S(x) = x + 5x^3 - 2x^4$; coeficiente principal: -2. **b)** $T(x) = x^5 - 8x^4 + x$; coeficiente principal: 1.

*Al polinomio cuyo coeficiente principal es **1** se lo denomina **normalizado**.*
*Un polinomio está **ordenado** si sus términos están ordenados en forma creciente o decreciente respecto de los exponentes de la variable.*

**a)** $H(x) = 3x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$ **b)** $J(x) = 4 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ **c)** $Z(x) = x^5 - 2x^2 + 7$

*Un polinomio está **completo** si tiene todas las potencias decrecientes del grado.*

**a)** $R(x) = 6x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x - 1$; está completo. **b)** $Q(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 3$; está incompleto.

Para completar un polinomio se agregan los términos que faltan con coeficiente cero.

**a)** $M(x) = x^5 + 3x^3 - 1 = x^5 + 0x^4 + 3x^3 + 0x^2 + 0x - 1$
**b)** $N(x) = 4x^4 + 2x^2 = 4x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 0x + 0$
**c)** $K(x) = x^6 - 3 = x^6 + 0x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 3$

# Expresiones algebraicas. Polinomios

PARADA PRÁCTICA 14

## VERIFICACIÓN 14

**• Clasifiquen de acuerdo al número de término e indiquen el grado, coeficiente principal y término independiente de cada uno de los siguientes polinomios.**

**1)** $P(x) = 6 + x^3 + 3x - x^2$

**2)** $Q(x) = 7x^3 - 2x^5 + 4$

**3)** $R(x) = 0x^4 - x + 5x^2$

## APLICACIÓN 14

### Ejercicio 14.1

**• Marquen con una X las expresiones algebraicas que son polinomios.**

**1)** $16x + x^{-1}$ ☐

**2)** $\sqrt{3}x^2 - 5$ ☐

**3)** $\sqrt[5]{x^2} - 9$ ☐

**4)** $\frac{2}{3}x^2 + 5x - 2$ ☐

**5)** $\sqrt{\frac{2x+1}{3}}$ ☐

**6)** $x^{10} - \frac{x}{5}$ ☐

### Ejercicio 14.2

**• Indiquen el grado de cada uno de los siguientes polinomios.**

**1)** $3x^2 - 2x - x^4$

**2)** $x^3 - 2^7.x^5$

**3)** $-x^3 + 6 + 0x^5$

**4)** $x + 3^3$

### Ejercicio 14.3

**• Escriban un polinomio que cumpla con cada una de las siguientes condiciones.**

**1)** Binomio de grado 2:

**2)** Trinomio de grado 3:

**3)** Monomio de grado 6:

**4)** Cuatrinomio de grado 5:

### Ejercicio 14.4

**• Clasifiquen e indiquen el grado de los siguientes polinomios.**

**1)** $x^3 - 1$:

**2)** $2^5.x$:

**3)** $3x^2 - 5x + 9$:

**4)** $1 - x$:

**5)** $x^3 + 5x - 6x^2 + 1$:

**6)** $2x - 0x^4$:

### Ejercicio 14.5

**• Ordenen y completen cada uno de los siguientes polinomios.**

**1)** $5x^3 - 1 =$

**2)** $-27x^3 + x^4 + 2 =$

**3)** $-2 + 2x^3 - x =$

**4)** $x - 3x^2 + x^5 - 1 =$

PARADA TEÓRICA 15

# Adición y sustracción de polinomios

La suma de varios monomios semejantes es otro monomio semejante al dado, cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes de los monomios dados.

**a)** $2x^3 + x^3 + 6x^3 = 9x^3$ **b)** $6x^5 + \frac{1}{2}x^5 + x^5 = \frac{15}{2}x^5$ **c)** $x + x + x + x + x = 5x$

Para restar dos monomios, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

$P(x) = 6x^4 \wedge Q(x) = -3x^4 \Rightarrow P(x) - Q(x) = 6x^4 + 3x^4 = 9x^4$

***Reducir*** *un polinomio es sumar o restar sus términos semejantes.*

**a)** $2x + 3x^4 + x - x^4 = 2x^4 + 3x$ **b)** $x^5 - \frac{1}{3}x^4 + x^4 + x^3 - 6x^3 = x^5 + \frac{2}{3}x^4 - 5x^3$

Para sumar varios polinomios entre sí, se completan y ordenan, luego se encolumnan sus términos semejantes y se suman.

**a)** Dados: $\begin{cases} P(x) = -3 + 2x^2 - 5x^3 + x^4 \\ Q(x) = -9x^3 + x^2 + x - 1 \end{cases}$

$P(x) + Q(x)$

$$\begin{array}{r} x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 0x - 3 \\ + \quad 0x^4 - 9x^3 + x^2 + x - 1 \\ \hline x^4 - 14x^3 + 3x^2 + x - 4 \end{array}$$

**b)** Dados: $\begin{cases} R(x) = x^2 - x + 1 \\ T(x) = -x + 2 - 5x^2 \end{cases}$

$R(x) + T(x)$

$$\begin{array}{r} x^2 - x + 1 \\ + \quad -5x^2 - x + 2 \\ \hline -4x^2 - 2x + 3 \end{array}$$

Para restar dos polinomios, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

**a)** Dados: $\begin{cases} M(x) = 2x^2 + x - 2 \\ N(x) = x^2 + 1 \end{cases}$

$M(x) - N(x)$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + x - 2 \\ + \quad -x^2 + 0x - 1 \\ \hline x^2 + x - 3 \end{array}$$

**b)** Dados: $\begin{cases} A(x) = -2x + 3x^2 - \frac{1}{2}x^3 - 7 \\ C(x) = 3x - 5x^2 - x^4 + 2 \end{cases}$

$A(x) - C(x)$

$$\begin{array}{r} 0x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 2x - 7 \\ + \quad x^4 - 0x^3 + 5x^2 - 3x - 2 \\ \hline x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 8x^2 - 5x - 9 \end{array}$$

Para resolver una suma algebraica de polinomios, se opera en el orden en que aparecen los términos.

Dados: $P(x) = 6x^2 + 2x - 1$, $Q(x) = x^2 + 3x - 2$ y $R(x) = 2x^2 + x + 5$.

**a)** $P(x) + Q(x) + R(x)$

$$\begin{array}{r} P(x) = 6x^2 + 2x - 1 \\ Q(x) = x^2 + 3x - 2 \\ \underline{R(x) = 2x^2 + x + 5} \end{array}$$

$P(x) + Q(x) + R(x) = 9x^2 + 6x + 2$

**b)** $P(x) + Q(x) - R(x)$

$$\begin{array}{r} 6x^2 + 2x - 1 \\ + \quad x^2 + 3x - 2 \\ \hline P(x) + Q(x) = 7x^2 + 5x - 3 \\ + [-R(x)] \quad \underline{-2x^2 - x - 5} \end{array}$$

$P(x) + Q(x) - R(x) = 5x^2 + 4x - 8$

# Adición y sustracción de polinomios

PARADA PRÁCTICA 15

## VERIFICACIÓN 15

- **Resuelvan las siguientes operaciones.**

**1)** $-3x + x - 5x + x =$

**2)** $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^2 - x^2 =$

**3)** $\sqrt{2}x^4 - 2\sqrt{2}x^4 =$

## APLICACIÓN 15

### Ejercicio 15.1

- **Escriban el polinomio reducido.**

**1)** $4x^3 + 5x^2 - 2x - x =$

**2)** $6x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 2x^3 - x^4 =$

**3)** $-4x^5 + x^3 - 0x^3 + \frac{1}{2}x^5 =$

**4)** $40x - x^2 + 5x + 6x^2 - x^3 =$

### Ejercicio 15.2

Dados los siguientes polinomios:

$P(x) = -2x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x + 3$; $Q(x) = 3x - 4 + \frac{1}{2}x^3 - 2x^2$ y $R(x) = x^2 - 5x + 2$.

- **Resuelvan las siguientes operaciones.**

**1)** $P(x) + Q(x)$

**2)** $P(x) - Q(x)$

**3)** $P(x) + R(x)$

**4)** $R(x) - Q(x)$

### Ejercicio 15.3

Dados los siguientes polinomios:

$P(x) = x^2 - 1$; $Q(x) = x^2 + 1$ y $R(x) = x^2 + 2x + 1$.

- **Resuelvan las siguientes sumas algebraicas.**

**1)** $P(x) - Q(x) - R(x)$

**2)** $R(x) - Q(x) + P(x)$

PARADA TEÓRICA 16

# Multiplicación de polinomios

Para multiplicar dos monomios se deben multiplicar los coeficientes y las indeterminadas entre sí, aplicando la regla de los signos y las propiedades de la potenciación. $x^n.x^m = x^{n+m}$

**a)** $(3x)(2x) = 6x^2$ **b)** $(10x^4)(-5x^4) = -50x^8$ **c)** $(-4x)(x^3) = -4x^4$ **d)** $(-6x^5)(-3x^2) = 18x^7$

Para multiplicar un polinomio por un número real, se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma y resta. $a(b \pm c) = ab \pm ac$

$$-3\left(x^3 + 2x^2 + \frac{1}{3}x - 4\right) = -3x^3 + (-3)2x^2 + (-3)\frac{1}{3}x - (-3).4 = -3x^3 - 6x^2 - x + 12$$

Para multiplicar dos polinomios se aplica la propiedad distributiva, efectuando luego la multiplicación de monomios. $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Dados: $P(x) = 2x^2 - 5x + 2$ y $Q(x) = 3x^2 - x$.

$$P(x).Q(x) = (2x^2 - 5x + 2)(3x^2 - x)$$
$$= (2x^2)(3x^2) + 2x^2(-x) + (-5x)(3x^2) + (-5x)(-x) + 2(3x^2) + 2(-x)$$
$$= 6x^4 - 2x^3 - 15x^3 + 5x^2 + 6x^2 - 2x$$
$$P(x).Q(x) = 6x^4 - 17x^3 + 11x^2 - 2x$$

## Producto de la suma de dos términos por su diferencia

*El producto de la suma de dos términos por la diferencia de los mismos, es igual a la diferencia de los cuadrados de dichos términos.*

$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$ $\quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

**a)** $(x + 4)(x - 4) = x^2 - 4x + 4x - 16 = x^2 - 16$

**b)** $(x^2 + 5x)(x^2 - 5x) = x^4 - 5x^3 + 5x^3 - 25x^2 = x^4 - 25x^2$

**c)** $\left(2x^5 + \frac{1}{5}x^3\right)\left(2x^5 - \frac{1}{5}x^3\right) = 4x^{10} - \frac{2}{5}x^8 + \frac{2}{5}x^8 - \frac{1}{25}x^6 = 4x^{10} - \frac{1}{25}x^6$

**d)** $\left(-\frac{1}{2}x^2 + 7x\right)\left(-\frac{1}{2}x^2 - 7x\right) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{2}x^3 - \frac{7}{2}x^3 - 49x^2 = \frac{1}{4}x^4 - 49x^2$

## Operaciones combinadas

Las operaciones combinadas entre polinomios se resuelven aplicando los mismos procedimientos y propiedades que con números reales.

Dados: $P(x) = 5x^2 + 6x + 2$; $Q(x) = 2x^3 - x + 6$ y $R(x) = x^2 + 1$.

$$P(x).R(x) + Q(x) = (5x^2 + 6x + 2)(x^2 + 1) + 2x^3 - x + 6$$
$$= 5x^4 + 5x^2 + 6x^3 + 6x + 2x^2 + 2 + 2x^3 - x + 6$$
$$P(x).R(x) + Q(x) = 5x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 5x + 8$$

# Multiplicación de polinomios

PARADA PRÁCTICA 16

## VERIFICACIÓN 16

- **Resuelvan las siguientes multiplicaciones de monomios.**

**1)** $(2x^2)(-6x) =$

**2)** $\left(-\frac{1}{2}x^2\right)(8x^3) =$

**3)** $\left(-\frac{4}{9}x^4\right)\left(-\frac{15}{8}x^5\right) =$

## APLICACIÓN 16

### Ejercicio 16.1

- **Resuelvan los siguientes productos.**

**1)** $(-2x)\left(-\frac{1}{3}x^3 + 5x^2\right) =$

**2)** $(6x^3 - 3x^2 + 12x)(-x^2) =$

**3)** $\left(-\frac{4}{3}x^2 + \frac{12}{5}x - 6\right)\left(\frac{3}{4}x^4\right) =$

**4)** $\left(3x^2 + \frac{1}{2}\right)\left(3x^2 - \frac{1}{2}\right) =$

**5)** $(5x^6 + 2x)(5x^6 - 2x) =$

**6)** $\left(-\frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{6}x\right)\left(-\frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{6}x\right) =$

### Ejercicio 16.2

- **Resuelvan los siguientes productos de polinomios.**

**1)** $(x^3 - x + 1)(x^2 - x)$

**2)** $(x^5 - x^3 - x + 1)(x^3 - x^2 + x - 2)$

**3)** $\left(-\frac{2}{3}x + x^3\right)(2x - 3x^2 + 1)$

**4)** $(2x - 3x^2 + 1)\left(-2x^3 - \frac{1}{2} + 3x\right)$

### Ejercicio 16.3

- **Resuelvan.**

**1)** $2(x^2 - 1) - 3(x^2 + 2x + 1) - 2(x^2 + 1) =$

**2)** $\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) + 5(x^2 + 1) - 3(x^2 - 1) =$

### Ejercicio 16.4

Dados: $P(x) = 2x^2 - 3$; $Q(x) = 5x + 1$ y $R(x) = -6x^3 + 2x^2 + 7$.

- **Resuelvan los siguientes cálculos combinados.**

**1)** $P(x).Q(x) - R(x)$

**2)** $R(x).[Q(x) + P(x)]$

PARADA TEÓRICA

# 17 División de polinomios

Para dividir dos monomios se deben dividir los coeficientes y las indeterminadas entre sí, aplicando la regla de los signos y las propiedades de la potenciación.

$x^n : x^m = x^{n-m}$

**a)** $(4x^3):(2x) = (4:2)(x^3:x) = 2x^2$

**b)** $x^4:(8x^3) = [1:(-8)](x^4:x^3) = -\frac{1}{8}x$

**c)** $-6x^5:(3x^2) = (-6:3)(x^5:x^2) = -2x^3$

**d)** $(-10x^8):(-2x^3) = [-10:(-2)](x^8:x^3) = 5x^5$

Para dividir un polinomio por un monomio, se aplica la propiedad distributiva. $(a \pm b):c = a:c \pm b:c$

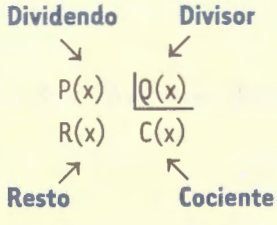
**a)** $(24x^5 - 16x^3 + 12x^2 - 4x):(-4x) = 24:(-4)(x^5:x) - 16:(-4)(x^3:x) + 12:(-4)(x^2:x) + (-4):(-4)(x:x)$

$= -6x^4 + 4x^2 - 3x + 1$

**b)** $(2x^6 + 5x^5 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x):\left(\frac{1}{2}x\right) = 4x^5 + 10x^4 + 2x^2 + x + 12$

Para dividir dos polinomios:

- *El grado del polinomio dividendo debe ser mayor o igual que el grado del polinomio divisor.*
- *El polinomio dividendo debe estar completo y ordenado en forma decreciente.*
- *El polinomio divisor debe estar ordenado.*




$P(x) = C(x).Q(x) + R(x)$

Dados: $P(x) = 2x - 3 + 2x^4$ y $Q(x) = -2x + x^2$.
Hallar $P(x):Q(x)$.

El dividendo debe estar completo y ordenado: $P(x) = 2x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 2x - 3$.
El divisor debe estar ordenado: $Q(x) = x^2 - 2x$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 2x - 3 & x^2 - 2x \\ \underline{-\,2x^4 + 4x^3} & \\ -4x^3 + 0x^2 & 2x^2 + 4x + 8 \\ \underline{-\,4x^3 + 8x^2} & \downarrow \\ -8x^2 + 2x & \text{Cociente: } C(x) \\ \underline{-\,8x^2 + 16x} & \\ 18x - 3 \rightarrow \text{Resto: } R(x) & \end{array}$$

$C(x) = 2x^2 + 4x + 8$
$R(x) = 18x - 3$

# División de polinomios

PARADA PRÁCTICA 17

## VERIFICACIÓN 17

- **Resuelvan las siguientes divisiones de monomios.**

**1)** $(-10x^4):(5x) =$

**2)** $\left(\frac{1}{4}x^5\right):\left(-\frac{3}{2}x^3\right) =$

**3)** $(-10x^7):(-4x^2) =$

## APLICACIÓN 17

### Ejercicio 17.1

- **Resuelvan las siguientes divisiones.**

**1)** $(6x^3 - 12x^2 + 3x):(-3x) =$

**2)** $\left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - 2x^2\right):\left(\frac{1}{2}x\right) =$

**3)** $\left(x^4 - 15x^3 + 9x^2 - \frac{6}{5}x\right):\left(-\frac{3}{5}x\right) =$

**4)** $\left(-6x^4 + \frac{3}{2}x^3 - 2x^2\right):\left(-\frac{1}{3}x^2\right) =$

**5)** $\left(-\frac{1}{3}x^6 + x^5 - 2x^4 + 5x^3\right):(-3x^3) =$

### Ejercicio 17.2

- **Hallen el cociente y el resto de las siguientes divisiones.**

**1)** $(2x^3 - 4x^2 - 5x - 3):(x + 1)$

**2)** $(x^3 - 6x^2 + 2):\left(\frac{1}{3}x + 1\right)$

**3)** $(5x^3 - 4x - 3):(x^2 - x)$

**4)** $(2x^5 + x^4 - 3x^3 + x^2):(x^3 - x + 1)$

PARADA TEÓRICA

# 18 Regla de Ruffini. Teorema del resto

La **Regla de Ruffini** es un método práctico que se utiliza para dividir un polinomio P(x) por otro cuya forma sea x + a.

Dados: $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 5$ y $Q(x) = x + 2$.
Hallar P(x):Q(x), aplicando la regla de Ruffini.

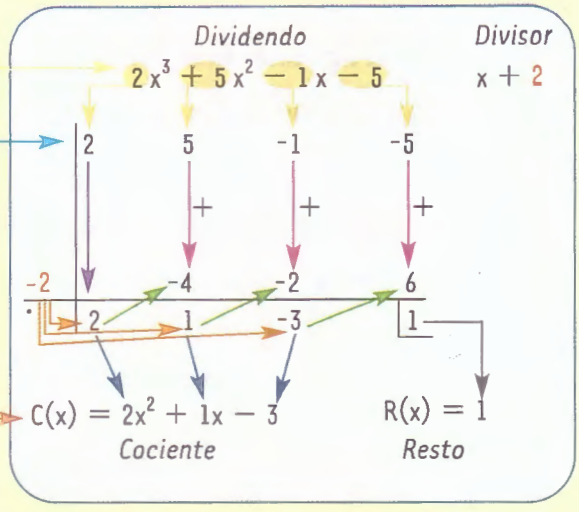
El polinomio **dividendo** debe estar **completo y ordenado**.

Se escriben alineados los coeficientes del dividendo.

El coeficiente principal se "baja" sin ser modificado; luego se lo multiplica por el opuesto del término independiente del divisor y se suma con el segundo coeficiente; y así sucesivamente hasta llegar al resto.

Los números que se obtienen son los coeficientes del cociente y el último valor es el resto.

El polinomio **cociente es un grado menor** que el polinomio **dividendo**.




**a)** $(x^3 - x + 2):(x - 2)$

$1x^3 + 0x^2 - 1x + 2 \rightarrow$ Dividendo

| | 1 | 0 | -1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | 2 | 4 | 6 |
| | 1 | 2 | 3 | 8 |

Cociente $\rightarrow x^2 + 2x + 3$

Resto $\rightarrow 8$

**b)** $\left(\frac{1}{3}x^4 - 3x^2 + 1\right):(x + 1)$

$\frac{1}{3}x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x + 1 \rightarrow$ Dividendo

| | $\frac{1}{3}$ | 0 | $-3$ | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| -1 | | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{8}{3}$ | $-\frac{8}{3}$ |
| | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{8}{3}$ | $\frac{8}{3}$ | $-\frac{5}{3}$ |

Cociente $\rightarrow \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{8}{3}$

Resto $\rightarrow -\frac{5}{3}$

## Teorema del resto

*El **resto** de la división de un polinomio por otro de la forma x + a, es el valor que resulta de reemplazar la variable del dividendo por el valor opuesto al término independiente del divisor.*

**a)** Dados: $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 5$ y $Q(x) = x + 2$.

El resto de la división P(x):Q(x), se obtiene:

$P(-2) = 2(-2)^3 + 5(-2)^2 - (-2) - 5$
$P(-2) = -16 + 20 + 2 - 5 = 1$
El resto de la división es 1.

**b)** Dados: $P(x) = x^2 - 2x - 3$ y $Q(x) = x - 3$.

El resto de la división P(x):Q(x), es:

$P(3) = 3^2 - 2.3 - 3$
$P(3) = 9 - 6 - 3 = 0$
Si el resto es 0 (cero): **P(x) es divisible por Q(x).**

# Regla de Ruffini. Teorema del resto

PARADA PRÁCTICA 18

## VERIFICACIÓN 18

- **Apliquen la regla de Ruffini en la siguiente división y verifiquen aplicando el teorema del resto.**

$(5x^2 - 3x + 4):(x - 3)$

## APLICACIÓN 18

### Ejercicio 18.1

- **Apliquen la regla de Ruffini en cada una de las siguiente divisiones.**

**1)** $(2x^3 + 3x - 1):(x - 2)$

**2)** $(3x^3 - 2x^2 - 2):(x + 1)$

**3)** $(-24x - x^4 + 5):(x + 3)$

**4)** $(-x^5 + 12x^3 - 15x^2 - 16):(x + 4)$

### Ejercicio 18.2

- **Calculen directamente el resto de las siguientes divisiones.**

**1)** $(5x^2 - 2x + 4):(x + 3)$

**2)** $(12x^4 - 5x^2 + 2x - 5):(x - 2)$

**3)** $(2x^3 - 4x^2 - 3):(x - 1)$

**4)** $\left(\frac{3}{2}x^3 + 4x^2 + 3\right):(x + 2)$

### Ejercicio 18.3

- **Marquen con una X las divisiones exactas.**

**1)** $(x^5 + 32):(x + 2)$ ☐

**2)** $(4x^3 + 5x - x):(x + 2)$ ☐

**3)** $(16 - x^4):(x + 2)$ ☐

PARADA TEÓRICA

# 19 Potenciación de polinomios

## Potencia de un monomio

Para resolver la potencia de un monomio, se debe aplicar la propiedad distributiva de la potenciación respecto de la multiplicación y la potencia de otra potencia.

$(a.b)^n = a^n.b^n$

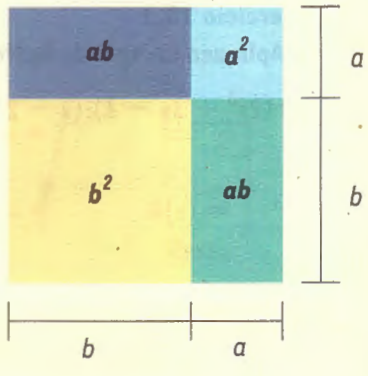
$(x^n)^m = x^{n.m}$

**a)** $(2x)^4 = 2^4.x^4 = 16x^4$ **b)** $(-3x^3)^2 = (-3)^2.(x^3)^2 = 9x^6$ **c)** $\left(-\frac{2}{5}x^7\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right)^3.(x^7)^3 = -\frac{8}{125}x^{21}$

## Cuadrado de un binomio

Al elevar al cuadrado un binomio se obtiene un **trinomio cuadrado perfecto**.

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$




$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Cuadrado de un binomio — Trinomio cuadrado perfecto

**a)** $(x + 3)^2 = x^2 + 2.3x + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

**b)** $\left(\frac{1}{2}x - 5\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}(-5)x + (-5)^2 = \frac{1}{4}x^2 - 5x + 25$

**c)** $\left(-\frac{3}{2}x + x^2\right)^2 = \left(-\frac{3}{2}x\right)^2 + 2\left(-\frac{3}{2}x\right)x^2 + (x^2)^2 = \frac{9}{4}x^2 - 3x^3 + x^4$

**d)** $(-x - 3)^2 = (-x)^2 + 2(-3)(-x) + (-3)^2 = x^2 + 6x + 9$

## Cubo de un binomio

Al elevar al cubo un binomio se obtiene un **cuatrinomio cubo perfecto**.

$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)^2.(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$

$(a + b)^3 = a^2.a + a^2.b + 2aba + 2abb + b^2.a + b^2.b = a^3 + a^2.b + 2a^2.b + 2ab^2 + b^2.a + b^3$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2.b + 3ab^2 + b^3$$

Cubo de un binomio — Cuatrinomio cubo perfecto

**a)** $(x + 4)^3 = x^3 + 3.4x^2 + 3.4^2x + 4^3 = x^3 + 12x^2 + 48x + 64$

**b)** $(2x - 3)^3 = (2x)^3 + 3(-3)(2x)^2 + 3.2x(-3)^2 + (-3)^3 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

**c)** $\left(-2x^2 + \frac{3}{2}\right)^3 = (-2x^2)^3 + 3 \cdot \frac{3}{2}\left(-2x^2\right)^2 + 3(-2x^2)\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 = -8x^6 + 18x^4 - \frac{27}{2}x^2 + \frac{27}{8}$

**d)** $(-x - 2)^3 = (-x)^3 + 3(-2)(-x)^2 + 3(-x)(-2)^2 + (-2)^3 = -x^3 - 6x^2 - 12x - 8$

# Potenciación de polinomios

PARADA PRÁCTICA 19

## VERIFICACIÓN 19

- **Resuelvan las siguientes potencias.**

**1)** $(4x^2)^3 =$

**2)** $(-3x^4)^2 =$

**3)** $\left(-\frac{1}{2}x^3\right)^5 =$

**4)** $\left(-\frac{2}{3}x^6\right)^3 =$

**5)** $\left(-\frac{3}{4}x^8\right)^4 =$

**6)** $\left(-\frac{1}{10}x^9\right)^3 =$

## APLICACIÓN 19

### Ejercicio 19.1

- **Desarrollen los siguientes cuadrados.**

**1)** $(x + 5)^2 =$

**2)** $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 =$

**3)** $(x^5 - 1)^2 =$

**4)** $\left(-\frac{1}{3}x - 3\right)^2 =$

**5)** $(-3x^3 - x)^2 =$

**6)** $\left(x^4 - \frac{1}{2}x^3\right)^2 =$

### Ejercicio 19.2

- **Desarrollen los siguientes cubos.**

**1)** $(4 + x)^3 =$

**2)** $\left(5x + \frac{1}{2}\right)^3 =$

**3)** $(x^5 - 1)^3 =$

**4)** $(-x - 2)^3 =$

**5)** $(-3x^3 - 2x^2)^3 =$

### Ejercicio 19.3

- **Resuelvan las siguientes operaciones combinadas.**

**1)** $(x + 1)^2 + 2x(x - 3) + 3 =$

**2)** $(2x + 3)(-x^2) + (x + 2)^3 - \frac{1}{2}x =$

# TRAMO B: ejercitación final

**INTEGRACIÓN B**

## Ejercicio B.1

● **Completen y ordenen cada uno de los siguientes polinomios.**

**1)** $x^2 - 3x^3 + 8x^4 =$

**2)** $6x + 5x^4 + x^2 - 2 =$

**3)** $x + 4 - x^5 =$

**4)** $x^4 - 1 =$

**5)** $-\frac{2}{3} - \frac{1}{2}x^3 =$

## Ejercicio B.2

Sean: $P(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 2x$; $Q(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x$ y $R(x) = 2x^4 + x^3 + x$.

● **Calculen.**

**1)** $P(x) + Q(x)$

**2)** $P(x) - Q(x)$

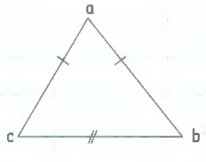
**3)** $P(x) + Q(x) - R(x)$

**4)** $P(x) + Q(x) + R(x)$

## Ejercicio B.3

● **Escriban el polinomio reducido del perímetro de cada una de las siguientes figuras.**

**1)**
$$\begin{cases} \overline{ac} = 2x^2 - 3x + 4 \\ \overline{cb} = x^2 - 5x + 2 \end{cases}$$




**2)**
$$\begin{cases} \overline{mn} = x^2 + 5x - 5 \\ \overline{np} = 2x^2 - 10x + 3 \\ \overline{rp} = \frac{3}{2}\overline{mn} \end{cases}$$

## Ejercicio B.4

● **Resuelvan las siguientes operaciones combinadas.**

**1)** $2x(x^3 - 3x + 2) + x^4 - x^2 =$

**2)** $x(5x^2 + 3) + 6x(x^2 - 1) =$

**3)** $3(x^3 - 2) + 6x(x^2 + x) =$

**4)** $8x(x^3 - x + 1) + 2x^2(x - 2) =$

## Ejercicio B.5

● **Resuelvan las siguientes multiplicaciones.**

**1)** $(-x^3)\left(-\frac{1}{3}x^2\right) =$

**2)** $x\left(\frac{1}{3}x\right)(-2x).3x^2 =$

**3)** $5x^2(-2x)\left(-\frac{1}{6}x^4\right).3x^3 =$

**4)** $(-0,2x^5)\left(-\frac{1}{2}x^3\right) =$

**5)** $\left(x^2 + \frac{1}{2}x^3 + 3\right)(x - 1) =$

**6)** $(-2x^2 + x - 1 + 2x^3)(x - 2x^2) =$

**7)** $(3x^2 - 2x + 1)(x^3 + 2x^2) =$

**8)** $(x^3 - 2x - x^2)(-x + x^2 - 2) =$

## Ejercicio B.6

● **Resuelvan los siguientes productos de la suma de dos términos por su diferencia.**

**1)** $(x + 4)(x - 4) =$

**2)** $(2x + 5)(2x - 5) =$

**3)** $\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\left(x^2 + \frac{1}{3}\right) =$

**4)** $(3x^2 + 0,5)\,(3x^2 - 0,5) =$

**5)** $(6x^3 + x)(6x^3 - x) =$

**6)** $\left(\frac{1}{2}x^5 - 10\right)\left(\frac{1}{2}x^5 + 10\right) =$

## Ejercicio B.7

● **Resuelvan las siguientes operaciones combinadas.**

**1)** $(x - 2)(x + 2) + x^2 - 2x + 1 - 2x(x - 3)$

**2)** $(x - 1)(x - 1) + 2x^3(x^2 - 3) - 5(-x^2 + 1)$

**3)** $5x^2(x^2 + 2x - 1) - 2(-x + 3) - (3x^4 + x^3 + 2x)$

**4)** $(2x^2 + 3x + 1)(x^2 - 4x) + 3x(5x + 1)$

# TRAMO B: ejercitación final

## Ejercicio B.8

- **Dividan los siguientes monomios.**

**1)** $(8x^5):(2x^3) =$

**2)** $\left(\frac{2}{3}x^3\right):\left(-\frac{1}{3}x\right) =$

**3)** $\left(-\frac{1}{5}x^{10}\right):\left(\frac{3}{4}x^3\right) =$

**4)** $(-6x^8):\left(-\frac{1}{2}x^7\right) =$

## Ejercicio B.9

- **Resuelvan las siguientes operaciones.**

**1)** $\left(2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x\right):2x =$

**2)** $(6x^4 + x^3 - 3x):(-x) =$

**3)** $\left(-9x^5 + \frac{1}{5}x^2\right):(3x^2) =$

**4)** $\left(-\frac{3}{2}x^2 \cdot \frac{4}{5}x^3\right):\left(-\frac{10}{3}x^3\right) =$

**5)** $[(3x + 5)(3x - 5)]:(-5) =$

## Ejercicio B.10

- **Resuelvan las siguientes divisiones.**

**1)** $(2x^3 - 9x^2 + 2x - 5):(2x - 5)$

**2)** $(x^4 + 2x^3 - x^2 + x - 2):(x^2 + 1) =$

**3)** $(x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4):(x^2 - x) =$

**4)** $(x^3 - 125):(x^2 + 5x + 25) =$

## Ejercicio B.11

● **Resuelvan las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini.**

**1)** $(-x^4 + 2x^3 + x - 3):(x + 1)$

**2)** $(16x^2 - 2x^4 - 3x - 2):(x + 3)$

**3)** $(x^5 + 32):(x + 2)$

**4)** $\left(\frac{1}{3}x^4 - 2x^2 + 3\right):(x + 1)$

## Ejercicio B.12

● **Calculen directamente el resto de las siguientes divisiones.**

**1)** $(9x^2 - 6x - 5):(x - 1)$

**2)** $\left(\frac{1}{3}x^2 - 3x + 1\right):(x + 3)$

**3)** $\left(x^3 + 4x^2 - x + \frac{1}{3}\right):\left(x - \frac{1}{3}\right)$

**4)** $\left(-\frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1\right):(x + 2)$

## Ejercicio B.13

● **Marquen con una X las divisiones que son exactas.**

**1)** $(16 - x^4):(x + 2)$ ☐

**2)** $(x^8 + a^8):(x + a)$ ☐

**3)** $(27 - x^3):(x + 3)$ ☐

**4)** $(x^5 + 243):(x + 3)$ ☐

# TRAMO B: ejercitación final

## Ejercicio B.14

- **Resuelvan los siguientes cuadrados de binomios.**

**1)** $(4x + 3)^2 =$

**2)** $\left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2 =$

**3)** $(7x^2 + x)^2 =$

**4)** $(6x^3 - 2x)^2 =$

## Ejercicio B.15

- **Resuelvan los siguientes cubos de binomios.**

**1)** $(x^5 + 1)^3 =$

**2)** $(x^4 - 2)^3 =$

**3)** $(5x^2 - 2x^3)^3 =$

**4)** $(-x - 6x^3)^3 =$

## Ejercicio B.16

- **Resuelvan las siguientes operaciones combinadas.**

**1)** $(2x - 1)^2 + 2x(x - 2) =$

**2)** $(x^2 - 2x)^2 : x =$

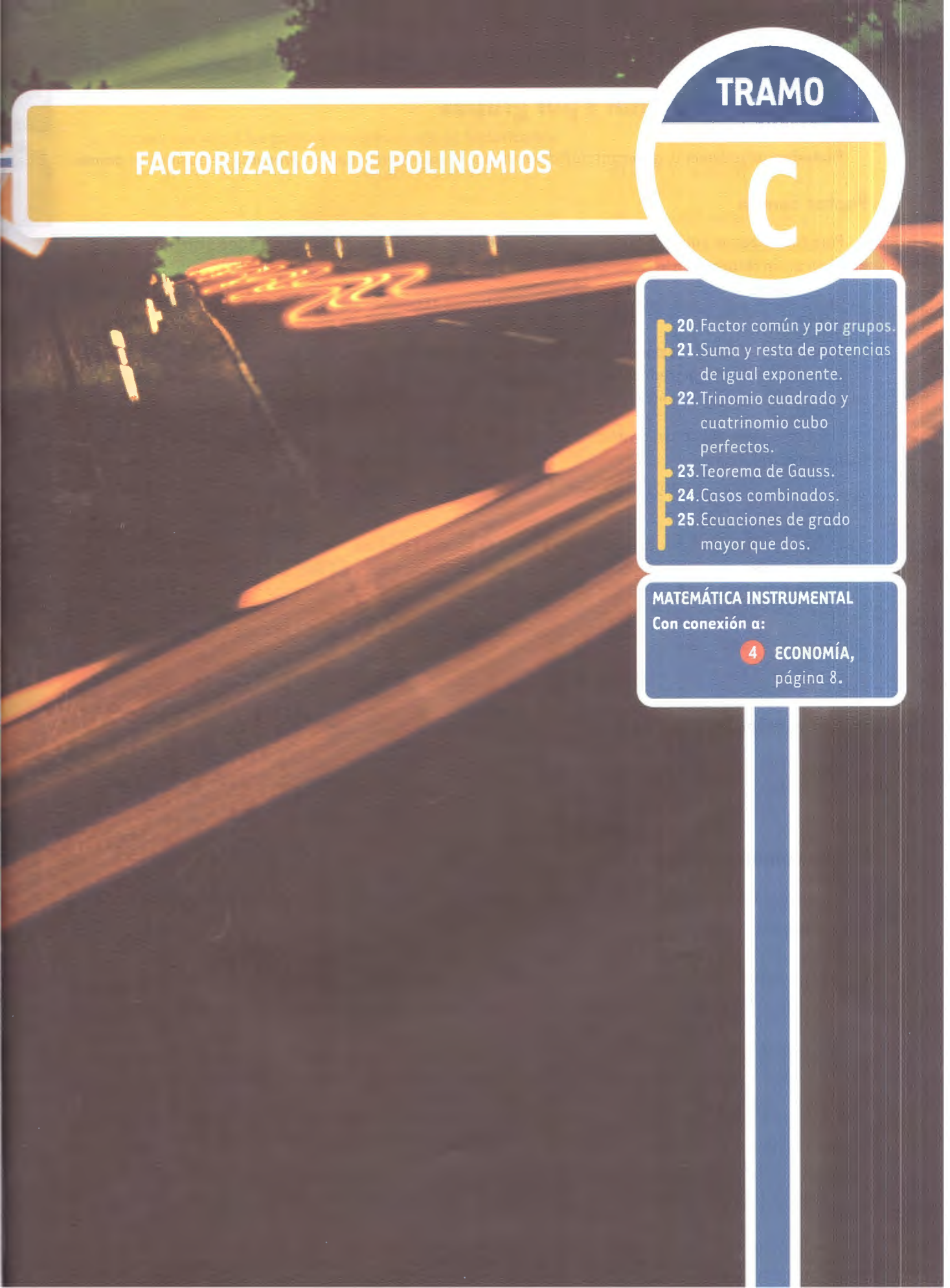
**3)** $(3x^2 + 2)^2 . (x - 1) =$

**4)** $3(2x^3 + x)^2 - 3x^2 - (5x^3)^2 =$

**5)** $3x^2(4x^3 - 3x^2)^2 =$

**6)** $(x^3 - 2x^2 + x + 4) : (x + 1) - (x + 1)^2 =$

**7)** $\left[(2x)^3\left(-\frac{1}{2}x^6\right)(-8x^3)^2\right] : (-2x^3)^3 =$



# TRAMO C

## FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS


- **20.** Factor común y por grupos.
- **21.** Suma y resta de potencias de igual exponente.
- **22.** Trinomio cuadrado y cuatrinomio cubo perfectos.
- **23.** Teorema de Gauss.
- **24.** Casos combinados.
- **25.** Ecuaciones de grado mayor que dos.


**MATEMÁTICA INSTRUMENTAL**

**Con conexión a:**


4 **ECONOMÍA,** página 8.

PARADA TEÓRICA 20

# Factor común y por grupos

***Factorizar*** *un polinomio, de* ***n*** *cantidad de términos, es expresarlo como un* ***producto*** *de polinomios* ***primos***.

## Factor común

Para factorizar un polinomio a través del factor común, se debe recordar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma o resta.

$a(b \pm c) = a.b \pm a.c$ (el factor a se repite en ambos términos)

Para extraer el factor común, se debe proceder de manera inversa: $a.b \pm a.c = a.(b \pm c)$

Primero se debe reconocer cuál es el factor que se encuentra repetido en cada término y luego, para encontrar el factor que va entre paréntesis, se divide cada término por el factor común.

*El factor común puede ser la variable del polinomio, elevada a la menor potencia, y/o el DCM de todos los coeficientes del mismo.*

Factorizar los siguientes polinomios:

**a)** $P(x) = 2x^2 - 4x.$

$P(x) = 2x.x - 2.2x \rightarrow$ 2x es el factor común de los dos términos.

$P(x) = 2x(x - 2) \rightarrow$ Expresión factoreada de P(x) a través del factor común.

$\frac{2x^2}{2x}$ $\frac{4x}{2x}$ $\rightarrow$ Dentro del paréntesis va lo que resulta de dividir cada término por 2x.

**b)** $P(x) = -12x^6 + 6x^5 - 15x^3 = -4.3x^3.x^3 + 2.3x^3.x^2 - 5.3x^3 = 3x^3(-4x^3 + 2x^2 - 5)$

Para normalizar un polinomio, se debe sacar como factor común el coeficiente principal.

$$P(x) = 2x^2 - \frac{1}{3} = \left(\frac{2x^2}{2} - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{2}}\right) = 2\left(x^2 - \frac{1}{6}\right)$$

Polinomio normalizado

## Factor común por grupos

Se aplica el factor común por grupos a polinomios que no tienen un factor común en todos sus términos.

Factorizar los siguientes polinomios:

**a)** $P(x) = x^5 - 2x^4 - 3x + 6$

$P(x) = \underbrace{(x^5 - 2x^4)}_{x^4} + \underbrace{(-3x + 6)}_{-3}$ $\rightarrow$ Se forman grupos de igual cantidad de términos, de forma tal que en cada uno de ellos haya un factor común.

$P(x) = x^4(x - 2) - 3(x - 2)$ $\rightarrow$ En cada término debe aparecer el mismo factor para poder extraerlo nuevamente como factor común.

$P(x) = (x - 2)(x^4 - 3)$ $\rightarrow$ Al sacar nuevamente factor común, la expresión queda factorizada a través del factor común por grupos.

**b)** $Q(x) = 3x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = (3x^3 + 3x^2) + (2x + 2) = 3x^2(x + 1) + 2(x + 1)$

$Q(x) = (x + 1)(3x^2 + 2)$

# Factor común y por grupos

PARADA PRÁCTICA 20

## VERIFICACIÓN 20

- **Marquen con una X los polinomios correctamente factorizados.**

**1)** $-x^4 + 5x^3 = -x^3(x - 5)$ ☐

**2)** $-\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x = -\frac{3}{2}x\left(x + \frac{1}{3}\right)$ ☐

**3)** $2x^6 - x = x(x^5 - 1)$ ☐

**4)** $-x^5 + x^4 = -x^4(x + 1)$ ☐

**5)** $-9x^2 - 4 = -9\left(x^2 + \frac{4}{9}\right)$ ☐

**6)** $5x^6 + 5x^2 = 5x^2(x^3 + 1)$ ☐

## APLICACIÓN 20

### Ejercicio 20.1

- **Completen los espacios vacíos para que se verifiquen las siguientes igualdades.**

**1)** $12x^2 - 4x + \quad = \quad (\ x^2 - x + \ )$

**2)** $x^7 + \quad = \quad (x^2 + 1)$

**3)** $x^7 + \quad x^5 - 5x^3 = \quad (\ - 3x^2 + \quad )$

**4)** $3x^4 + \quad = \quad (x^3 + 8)$

**5)** $-x^4 + \quad - 6x^2 = \quad (x^2 + 5x + \quad )$

**6)** $\quad + 48x^4 = 3x^4(5x^4 + \quad )$

### Ejercicio 20.2

- **Factoricen los siguientes polinomios.**

**1)** $24x^5 + 18x^4 - 30x^2$

**2)** $\frac{15}{16}x^4 - \frac{21}{40}x^3 - \frac{9}{28}x$

**3)** $x^4 - x^3 + x - 1$

**4)** $4x^3 - 2x^2 + 6x - 3$

**5)** $x^6 + 2x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x + 4$

**6)** $2x^5 - x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 8x - 4$

PARADA TEÓRICA 21

# Suma y resta de potencias de igual exponente

Para un polinomio de la forma $\mathbf{P(x) = x^n \pm a^n}$ existen cuatro posibilidades:

$$\mathbf{P(x) = x^n \pm a^n \ \wedge \ n \text{ es par}}$$
$$\mathbf{P(x) = x^n \pm a^n \ \wedge \ n \text{ es impar}}$$

**1)** $P(x) = x^4 - 16 = x^4 - 2^4$

Se buscan las raíces de P(x): $x^4 - 16 = 0 \Rightarrow |x| = 2 \Rightarrow x_1 = 2 \wedge x_2 = -2$
Por el teorema del resto: $P(2) = 0 \Rightarrow (x - 2)$ es divisor de P(x)
$P(-2) = 0 \Rightarrow (x + 2)$ es divisor de P(x)

Se aplica la regla de Ruffini

$(x^4 - 16):(x - 2)$

| | 1 | 0 | 0 | 0 | -16 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | | 2 | 4 | 8 | 16 |
| | 1 | 2 | 4 | 8 | 0 |

$(x^3 + 2x^2 + 4x + 8):(x + 2)$

| | 1 | 2 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| -2 | | -2 | 0 | -8 |
| | 1 | 0 | 4 | 0 |

$$\mathbf{P(x) = x^4 - 16 = (x^3 + 2x^2 + 4x + 8)(x - 2) = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)}$$

**2)** $P(x) = x^4 + 81$, no tiene raíces reales.

**3)** $P(x) = x^3 - 27 = x^3 - 3^3$
Se buscan las raíces de P(x):
$x^3 - 27 = 0 \Rightarrow x = 3$

Por el teorema del resto:
$P(3) = 0 \Rightarrow (x - 3)$ es divisor de P(x)

Se resuelve por la Regla de Ruffini P(x):(x − 3)
$\mathbf{P(x) = x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)}$

**4)** $P(x) = x^5 + 32 = x^5 + 2^5$
Se buscan las raíces de P(x):
$x^5 + 32 = 0 \Rightarrow x = -2$

Por el teorema del resto:
$P(-2) = 0 \Rightarrow (x + 2)$ es divisor de P(x)

Se resuelve por la Regla de Ruffini P(x):(x + 2)
$\mathbf{P(x) = (x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)(x + 2)}$

Resumiendo:

| $\mathbf{P(x) = x^n \pm a^n}$ | | **Divisor/es** |
|---|---|---|
| **n impar** | $x^n + a^n$ | $(x + a)$ |
| | $x^n - a^n$ | $(x - a)$ |
| **n par** | $x^n - a^n$ | $(x + a) \wedge (x - a)$ |
| | $x^n + a^n$ | No tiene divisores de la forma $(x \pm a)$ |

## Diferencia de cuadrados

**a)** $P(x) = x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$

**b)** $P(x) = x^4 - 25 = (x^2)^2 - 5^2 = (x^2 - 5)(x^2 + 5)$

**c)** $P(x) = x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x - 7)(x + 7)$

$$\mathbf{P(x) = x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)}$$

# Suma y resta de potencias de igual exponente

PARADA PRÁCTICA 21

**VERIFICACIÓN 21**

- **Resuelvan aplicando la diferencia de cuadrados.**

**1)** $1 - x^2 =$

**2)** $x^4 - 36 =$

**3)** $x^2 - \frac{49}{121} =$

**4)** $25x^2 - 4 =$

**5)** $x^6 - 100 =$

**6)** $x^4 - 625 =$

**APLICACIÓN 21**

## Ejercicio 21.1

- **Expresen los siguientes polinomios como producto a través de la suma y resta de potencias de igual exponente.**

**1)** $P(x) = x^7 + 1$

**2)** $P(x) = x^5 - \frac{1}{32}$

**3)** $P(x) = x^6 - 64$

**4)** $P(x) = x^4 - \frac{1}{81}$

PARADA TEÓRICA 22

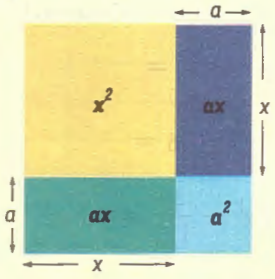
# Trinomio cuadrado y cuatrinomio cubo perfectos

## Trinomio cuadrado perfecto

$x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a)^2$ → **Cuadrado de un binomio:** expresión factorizada del trinomio cuadrado perfecto.

**Trinomio cuadrado perfecto:** desarrollo del cuadrado del binomio.

$$x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a)(x \pm a) = (x \pm a)^2$$




$$(x + a)^2 = x^2 + ax + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

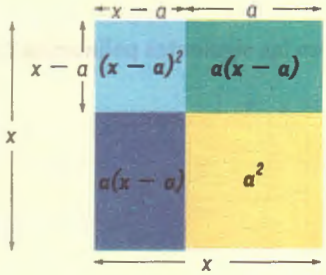
**a)** $P(x) = x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2.3x + 3^2 = (x + 3)^2$

**b)** $Q(x) = x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2.2x + 2^2 = (x - 2)^2$

**c)** $R(x) = x^2 + 8x + 9 = x^2 + 2.4x + 3^2$

$x$ $\quad 3 \neq 4$ $\quad 3$

No es trinomio cuadrado perfecto




$$(x - a)^2 = x^2 - a(x - a) - a(x - a) - a^2 = x^2 - ax + a^2 - ax + a^2 - a^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

## Cuatrinomio cubo perfecto

$x^3 + 3ax^2 + 3a^2.x + a^3 = (x + a)^3$ → **Cubo de un binomio:** expresión factorizada del cuatrinomio cubo perfecto.

**Cuatrinomio cubo perfecto:** es el desarrollo del cubo del binomio.

$x^3 \pm 3ax^2 + 3a^2.x \pm a^3 = (x \pm a)(x \pm a)(x \pm a) = (x \pm a)^3$ → **Expresión factorizada**

$$(x + a)^3 = (x + a)(x + a)(x + a) = (x^2 + 2ax + a^2)(x + a) = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

$$(x - a)^3 = (x - a)(x - a)(x - a) = (x^2 - 2ax + a^2)(x - a) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$$

**a)** $T(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + 3.2.x^2 + 3.2^2.x + 2^3 = (x + 2)^3$

**b)** $K(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^3 - 3.1x^2 + 3.1^2.x - 1^3 = (x - 1)^3$

**c)** $M(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 8 \neq x^3 - 3.2x^2 + 3.2^2.x - 2^3$ → No es cuatrinomio cubo perfecto

$6 \neq 4$ $\quad 12 \neq 8$

# Trinomio cuadrado y cuatrinomio cubo perfectos

PARADA PRÁCTICA 22

## VERIFICACIÓN 22

- **Marquen con una X los polinomios que son trinomios cuadrados perfectos.**

**1)** $P(x) = x^2 - 10x - 25$ ☐

**2)** $Q(x) = x^2 + 10x - 25$ ☐

**3)** $R(x) = x^2 - 10x + 25$ ☐

**4)** $S(x) = x^2 + 5x + \frac{25}{4}$ ☐

**5)** $T(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$ ☐

**6)** $H(x) = x^2 - 8x + 4$ ☐

## APLICACIÓN 22

### Ejercicio 22.1

- **Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda.**

**1)** $x^2 - 2x + 1 = (x + 1)^2$ ☐

**2)** $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$ ☐

**3)** $x^2 + 2x - 1 = (x - 1)^2$ ☐

**4)** $1 + 3x^2 - 3x - x^3 = (1 - x)^3$ ☐

**5)** $x^3 - 27x^2 + 9x - 27 = (x - 3)^3$ ☐

**6)** $x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = (x + 3)^3$ ☐

### Ejercicio 22.2

- **Expresen cada trinomio cuadrado perfecto como el cuadrado de un binomio.**

**1)** $P(x) = 4x^2 - 4x + 1$

**2)** $T(x) = x^6 + 4x^3 + 4$

**3)** $S(x) = x^2 + 3x + \frac{9}{4}$

**4)** $G(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$

### Ejercicio 22.3

- **Expresen cada cuatrinomio cubo perfecto como el cubo de un binomio.**

**1)** $D(x) = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$

**2)** $P(x) = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$

**3)** $T(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 1$

**4)** $R(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$

PARADA TEÓRICA 23

# Teorema de Gauss

*Si el polinomio P(x), de grado n, con coeficientes enteros y término independiente no nulo, admite una raíz racional $\frac{p}{q}$ (fracción irreducible), entonces* ***p*** *es divisor del término independiente y* ***q*** *lo es del coeficiente principal.*

Para hallar las raíces racionales de $P(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + d$:

- se buscan los divisores del término independiente y del coeficiente principal.
- se buscan las posibles raíces: p → Divisores del término independiente.

  q → Divisores del coeficiente principal.

Todo polinomio P(x), de grado n, de n raíces reales, puede factorizarse como:

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

Siendo **a** el coeficiente principal de P(x) y $x_1; x_2; \ldots; x_n$ sus n raíces reales.

Para hallar las raíces racionales de $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$:

Divisores del término independiente, (-3): $\pm 1, \pm 3$

Divisores del coeficiente principal, (2): $\pm 1, \pm 2$

**Posibles raíces $\frac{p}{q}$**

$$x_1 = \pm 1; x_2 = \pm \frac{1}{2}; x_3 = \pm 3; x_4 = \pm \frac{3}{2}$$

Se especializa el polinomio P(x) por las posibles raíces ($x_n$ es raíz si $P(x_n) = 0$).

$P(-1) = 0 \Rightarrow$ **$x_1 = -1$, es raíz**

$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow$ **$x_2 = -\frac{1}{2}$, es raíz**

$P(3) = 0 \Rightarrow$ **$x_3 = 3$, es raíz**

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 \Rightarrow P(x) = 2(x + 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3)$$

*Un polinomio P(x) tiene una raíz* ***múltiple*** *si al descomponerlo en función de sus raíces hay factores iguales; el orden de multiplicidad de la misma está dado por el exponente del factor.*

| Polinomio factorizado | Raíces | Multiplicidad |
|---|---|---|
| $P_1(x) = 2(x + 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3)$ | $x_1 = -1 \wedge x_2 = -\frac{1}{2} \wedge x_3 = 3$ | Tres raíces simples |
| $P_2(x) = (x + 1)^2 = (x + 1)(x + 1)$ | $x_1 = x_2 = -1$ | Una raíz doble |
| $P_3(x) = (x - 2)^3 = (x - 2)(x - 2)(x - 2)$ | $x_1 = x_2 = x_3 = 2$ | Una raíz triple |
| $P_4(x) = (x + 2)^2.(x - 1)^3$ | $x_1 = x_2 = -2 \wedge x_3 = x_4 = x_5 = 1$ | -2, raíz doble y 1, raíz triple |
| $P_5(x) = x^3(x + 3) = x.x.x(x + 3)$ | $x_1 = x_2 = x_3 = 0 \wedge x_4 = -3$ | 0, raíz triple y -3, raíz simple |

# Teorema de Gauss

PARADA PRÁCTICA 23

## VERIFICACIÓN 23

- **Indiquen la multiplicidad de las raíces de los siguientes polinomios.**

**1)** $P(x) = -4(x-3)^2.(x+3)^2$

**2)** $Q(x) = 2(x+1)^5.x^2$

**3)** $T(x) = -3\left(x-\frac{3}{4}\right)^3.(x+2)$

**4)** $P(x) = (x+4)(x+1)^4$

## APLICACIÓN 23

### Ejercicio 23.1

- **Hallen las raíces de los siguientes polinomios y factorícenlos.**

**1)** $P_1(x) = -x^3 + 4x^2 - x - 6$

**2)** $P_2(x) = -4x^3 + 7x - 3$

**3)** $P_3(x) = -4x^4 + 12x^3 - 7x^2 - 3x + 2$

**4)** $P_4(x) = x^3 - 3x + 2$

**5)** $P_5(x) = x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 6x - 9$

**6)** $P_6(x) = x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4$

PARADA TEÓRICA

# 24 Casos combinados

En algunos polinomios se deben aplicar varias veces los distintos casos de factorización hasta que los factores de los mismos sean primos.

**a)** Si se puede sacar factor común, es el primer paso que se debe realizar, y luego analizar si a algunos de los factores se los puede seguir descomponiendo en nuevos factores.

Factor común $x^2$

**1)** $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2.(x^2 - 2x + 1) = x^2.(x - 1)^2$

Trinomio cuadrado perfecto

Factor común 8

**2)** $Q(x) = 8x^3 - 1 = 8\left(x^3 - \frac{1}{8}\right) = 8\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$

Resta de potencias de igual exponente

**b)** Se analizan las condiciones para sacar factor común por grupos, y luego se estudia si a algunos de los factores se los puede seguir descomponiendo en nuevos factores.

Factor común en grupos

$T(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = x^2.(x - 3) - 4(x - 3) = (x - 3)(x^2 - 4) = (x - 3)(x - 2)(x + 2)$

Diferencia de cuadrados

**c)** Se puede también aplicar el Teorema de Gauss.

Factor común -3

Trinomio cuadrado perfecto

$S(x) = -3x^3 + 15x^2 - 24x + 12 = -3(x^3 - 5x^2 + 8x - 4) = -3(x - 1)(x^2 - 4x + 4) = -3(x - 1)(x - 2)^2$

Teorema de Gauss

Se encuentra una raíz de $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$.

$S(1) = 0$ y se aplica la Regla de Ruffini con el divisor $(x - 1)$.

| | 1 | -5 | 8 | -4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | -4 | 4 |
| | 1 | -4 | 4 | 0 |

$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 1)(x^2 - 4x + 4)$

# Casos combinados

PARADA PRÁCTICA 24

## VERIFICACIÓN 24

● **Justifiquen cada transformación realizada.**

**1)** $P(x) = -4x^2 + 8x - 4$

$= -4(x^2 - 2x + 1) \longrightarrow$ a)

$= -4(x - 1)^2 \longrightarrow$ b)

**2)** $Q(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

$= x^2(x - 3) - (x - 3)$

$= (x - 3)(x^2 - 1) \longrightarrow$ a)

$= (x - 3)(x - 1)(x + 1) \longrightarrow$ b)

**3)** $R(x) = -2x^3 + 3x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$

$= -2\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}\right) \longrightarrow$ a)

$= -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 \longrightarrow$ b)

## APLICACIÓN 24

### Ejercicio 24.1

● **Expresen los siguientes polinomios en función de sus raíces.**

**1)** $P_1(x) = x^4 - x^2$

**2)** $P_2(x) = x^3 + x^2 + \frac{1}{4}x$

**3)** $P_3(x) = x^6 - \frac{1}{16}x^2$

**4)** $P_4(x) = \frac{2x^3 - 16}{9}$

**5)** $P_5(x) = x^3 - x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{9}{4}$

**6)** $P_6(x) = -x^4 + 3x^3 - \frac{9}{4}x^2$

# Casos combinados

## Ejercicio 24.2

Teniendo en cuenta los polinomios del ejercicio **24.1**:

- **Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda.**

**1)** $P_1(x)$ tiene una raíz simple en $x = 0$.

**2)** $P_2(x)$ tiene únicamente una raíz doble.

**3)** $P_3(x)$ tiene una raíz doble y dos raíces simples.

**4)** $P_4(x)$ tiene una raíz simple $x = -2$.

**5)** $P_5(x)$ tiene tres raíces simples.

**6)** $P_6(x)$ tiene solamente una raíz doble que es $x = \frac{3}{2}$.

## Ejercicio 24.3

- **Expresen los siguientes polinomios en función de sus raíces.**

**1)** $P(x) = -4x^3 - 2x^2 + 4x + 2$

**2)** $M(x) = x^4 - x^3 + 64x - 64$

**3)** $R(x) = -4x^3 - 4x^2 + x + 1$

**4)** $S(x) = x^4 + x^3 - x^2 - x$

## Ejercicio 24.4

**Factoricen los siguientes polinomios.**

**1)** $P(x) = 6x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 12x$

**2)** $Q(x) = 3x^4 - 4x^2 + 1$

**3)** $R(x) = 20x^3 - 60x^2 + 45x$

**4)** $S(x) = x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 32$

**5)** $T(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 4x$

**6)** $G(x) = \frac{3}{4}x^5 - \frac{3}{32}x^2$

PARADA TEÓRICA 25

# Ecuaciones de grado mayor que dos

Para encontrar el o los valores de x para los cuales $P(x) = -16$, siendo $P(x) = x^3 - x^2 - 16x$, se debe plantear la ecuación: $\mathbf{x^3 - x^2 - 16x = -16}$.

Para resolver este tipo de ecuaciones, hay que igualarlas a cero: $\mathbf{x^3 - x^2 - 16x + 16 = 0}$

Luego factorizar el polinomio resultante:

$$(x^3 - x^2) - (16x - 16) = 0$$
$$x^2.(x - 1) - 16(x - 1) = 0$$
$$(x^2 - 16)(x - 1) = 0$$
$$\mathbf{(x - 4)(x + 4)(x - 1) = 0}$$

Aplicar la ley de nulidad del producto:

*Para que un producto sea cero, tendrá que serlo al menos uno de los factores.* $\mathbf{a.b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0}$

$$x - 4 = 0 \vee x + 4 = 0 \vee x - 1 = 0$$
$$x = 4 \vee x = -4 \vee x = 1$$

Las raíces de $R(x) = x^3 - x^2 - 16x + 16$ son: $x_1 = 4$, $x_2 = -4$ y $x_3 = 1$.

Para verificar las soluciones, se reemplazan los valores de x en P(x):

Se debe verificar que $P(x_n) = x^3 - x^2 - 16x = -16$

$P(4) = 4^3 - 4^2 - 16.4$ $\quad$ $P(-4) = (-4)^3 - (-4)^2 - 16.(-4)$ $\quad$ $P(1) = 1^3 - 1^2 - 16.1$

$P(4) = 64 - 16 - 64$ $\quad$ $P(-4) = -64 - 16 + 64$ $\quad$ $P(1) = 1 - 1 - 16$

$P(4) = -16$ $\quad$ $P(-4) = -16$ $\quad$ $P(1) = -16$

Por lo tanto: $\mathbf{S = \{-4;4;1\}}$

Hallar x, tal que $P(x) = -1$.

**a)** $P(x) = x^3 + x^2 + x$

$$x^3 + x^2 + x = -1$$
$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$
$$(x^3 + x^2) + (x + 1) = 0$$
$$x^2(x + 1) + (x + 1) = 0$$
$$(x^2 + 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \vee x + 1 = 0$$
$$\varnothing \qquad x = -1$$

Verificación:

$P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1)$

$P(-1) = -1 + 1 - 1 \Rightarrow P(-1) = -1$

La solución: $S = \{-1\}$

**b)** $P(x) = x^3 + x + 1$

$$x^3 + x + 1 = -1$$
$$x^3 + x + 1 + 1 = 0$$
$$x^3 + x + 2 = 0$$

| | 1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| -1 | | -1 | 1 | -2 |
| | 1 | -1 | 2 | 0 |

$$(x^2 - x + 2)(x + 1) = 0$$
$$x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$
$$S = \{-1\}$$

# Ecuaciones de grado mayor que dos

PARADA PRÁCTICA 25

## VERIFICACIÓN 25

- **Apliquen la ley de anulación del producto a las siguientes ecuaciones y encuentren la solución.**

**1)** $x^2.(x + 1)(x + 2) = 0$ **2)** $-3(4x - 1)^2.(3x + 2) = 0$ **3)** $\frac{1}{4}x(-x + 1)(-4x + 2) = 0$

## APLICACIÓN 25

### Ejercicio 25.1

- **Resuelvan cada una de las siguientes ecuaciones.**

**1)** $x^3 - x - 1 = -1$

**2)** $2x^4 - 2x = 0$

**3)** $x^3 - 3x^2 + 2x + 10 = 16$

**4)** $2x^4 - x^3 - 22x^2 = 8x^2 + 3x^3$

# TRAMO C: ejercitación final

INTEGRACIÓN C

## Ejercicio C.1

- **Factoricen, normalizando previamente, los siguientes polinomios aplicando la diferencia de cuadrados.**

**1)** $P(x) = 3x^2 - \frac{27}{25}$

**2)** $Q(x) = -5x^2 + \frac{81}{5}$

**3)** $M(x) = \frac{-x^4 + 16}{3}$

**4)** $H(x) = \frac{7}{4}x^2 - \frac{4}{7}$

## Ejercicio C.2

- **Factoricen, normalizando previamante, los siguientes polinomios utilizando el cuadrado o el cubo de un binomio.**

**1)** $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{25}{2}$

**2)** $R(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 4x - \frac{8}{3}$

**3)** $T(x) = -4x^2 + 20x - 25$

**4)** $G(x) = 2x^3 - 9x^2 + \frac{27}{2}x - \frac{27}{4}$

## Ejercicio C.3

- **Expresen los siguientes trinomios como producto, en función de sus raíces.**

**1)** $S(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

**2)** $N(x) = -x^2 - \frac{13}{2}x + \frac{7}{2}$

**3)** $L(x) = -2x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

**4)** $J(x) = 5x^2 + 12x - 9$

**5)** $Z(x) = 4x^2 + 4x - 15$

**6)** $Q(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{5}x + \frac{1}{3}$

## Ejercicio C.4

- **Normalicen los siguientes polinomios y luego factorícenlos.**

**1)** $P(x) = 3x^2 - \frac{1}{3}$

**2)** $Q(x) = 2x^2 + x + \frac{1}{8}$

**3)** $S(x) = 16x^5 - \frac{1}{2}$

## Ejercicio C.5

- **Expresen cada polinomio como producto, en función de sus raíces, utilizando el Teorema de Gauss.**

**1)** $P_1(x) = 2x^3 - 3x + 1$

**2)** $P_2(x) = -2x^3 + 3x^2 + 4$

**3)** $P_3(x) = -6x^3 + 13x^2 - x - 2$

# TRAMO C: ejercitación final

INTEGRACIÓN C

## Ejercicio C.6

**Expresen los siguientes polinomios en función de sus raíces.**

**1)** $P(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$, que tiene por raíz a $x = 2$.

**2)** $Q(x) = -3x^4 - 6x^3 + 6x + 3$, que tiene por raíz a $x = 1$.

**3)** $M(x) = -x^3 - 9x^2 - 15x + 25$, que tiene por raíz doble a $x = -5$.

**4)** $R(x) = x^4 + 2x^3 - 15x^2 - 32x - 16$, que tiene por raíz doble a $x = -1$

## Ejercicio C.7

● **Marquen con una X la solución correcta.**

**1)** La ecuación $2(x + 2)(2x - 7)(x - 7) = 0$, tiene por solución:

**a)** $\{2;7;-7\}$ ☐ **b)** $\left\{-2;7;-\frac{7}{2}\right\}$ ☐ **c)** $x \in \left\{-2;\frac{7}{2};7\right\}$ ☐ **d)** $\{-2;7;-7\}$ ☐

**2)** La ecuación $2(-x + 3)(2x + 6)(3x - 9) = 0$, tiene por solución:

**a)** $\{-3;3;-6\}$ ☐ **b)** $\{3;-3;9\}$ ☐ **c)** $\{-3;6;9\}$ ☐ **d)** $\{-3;3\}$ ☐

**3)** La ecuación $2x^3(2x - 4)(x + 1) = 0$, tiene por solución:

**a)** $\{4;-1\}$ ☐ **b)** $\{-2;2;-1\}$ ☐ **c)** $\{0;2;-1\}$ ☐ **d)** $\{0;4;-1\}$ ☐

**4)** La ecuación $4(x^2 + 4)(x^2 + 9) = 0$, tiene por solución:

**a)** $\{-2;2;3;-3\}$ ☐ **b)** $\varnothing$ ☐ **c)** $\{4;2;-3\}$ ☐ **d)** $\{2;-3\}$ ☐

## Ejercicio C.8

● **Resuelvan las siguientes ecuaciones.**

**1)** $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x - 14 = -38$

**2)** $x^3 - 5x^2 + 7x + 7 = 10$

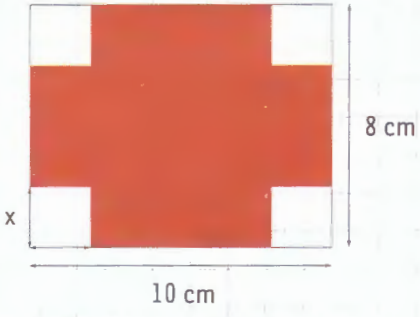
**3)** $x^5 + 4x^3 + 16x^2 = 8x^2 - 32$

# TRAMO C: ejercitación final

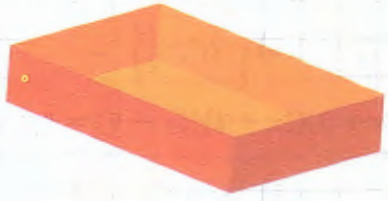
## Ejercicio C.9

Con una plancha de cartón de 10 cm de largo y 8 cm de ancho se fabrican cajas sin tapa.

*Caja desarmada sin tapa*




*Caja armada sin tapa*



- **Hallen la expresión polinómica correspondiente al volumen de la caja.**

**1)**

- **Calculen.**

**2)** Las dimensiones de una caja, cuyas medidas son proporcionales a la anterior, si el volumen de la misma es de 48 $cm^3$.

# EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS

TRAMO

D

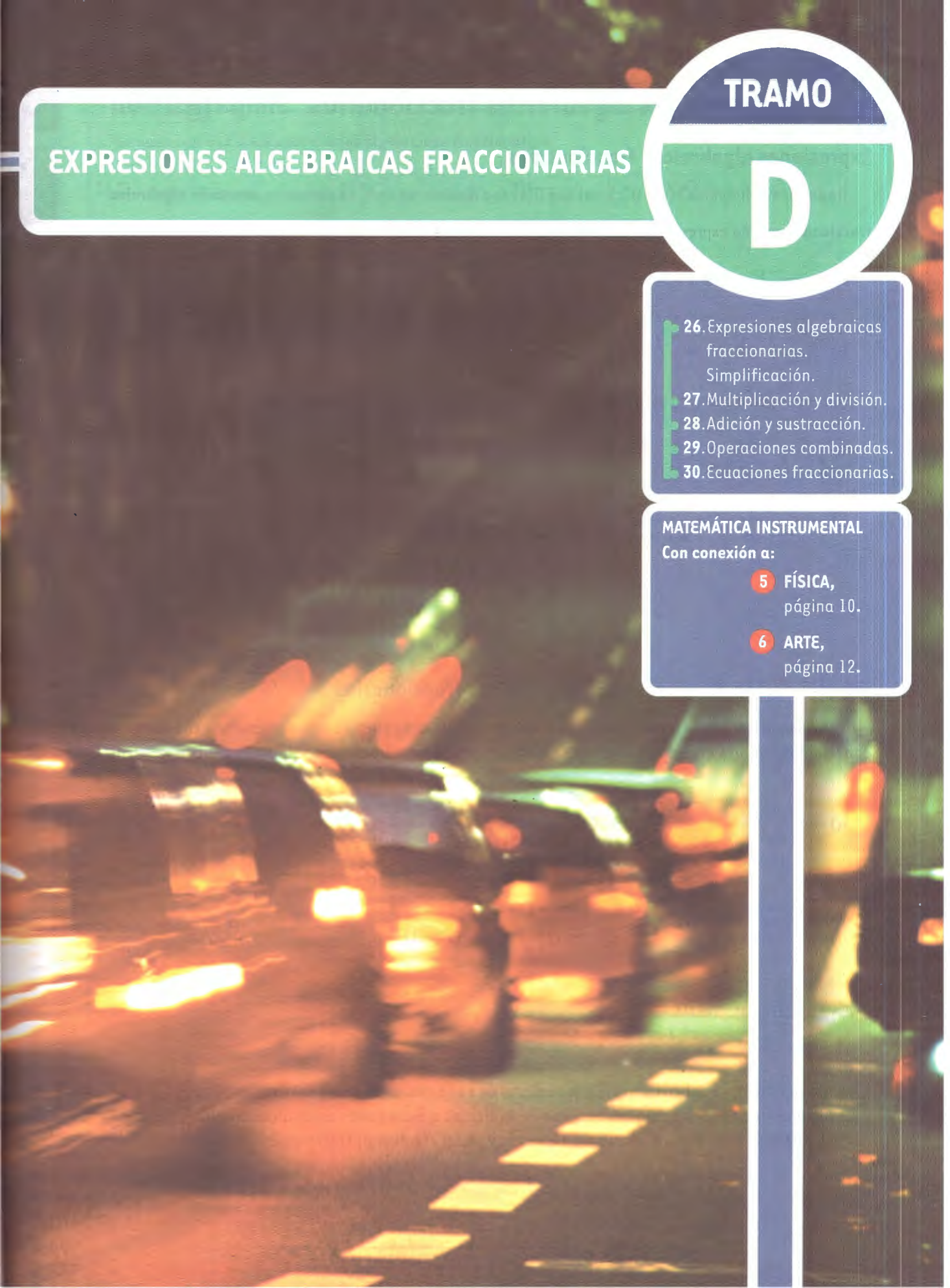

**26**. Expresiones algebraicas fraccionarias. Simplificación.
**27**. Multiplicación y división.
**28**. Adición y sustracción.
**29**. Operaciones combinadas.
**30**. Ecuaciones fraccionarias.


**MATEMÁTICA INSTRUMENTAL**

**Con conexión a:**


5 **FÍSICA,** página 10.

6 **ARTE,** página 12.

PARADA TEÓRICA 26

# Expresiones algebraicas fraccionarias. Simplificación

## Expresiones algebraicas fraccionarias

Dados dos polinomios P(x)y Q(x), tal que Q(x) sea distinto de cero, se denomina **expresión algebraica fraccionaria** a toda expresión de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

a) $\frac{3}{x - x^2}$ $\forall x : x \neq 0 \wedge x \neq 1$

b) $\frac{5x^2 - 3}{3x + 1}$ $\forall x : x \neq -\frac{1}{3}$

c) $\frac{3x + 2}{x^2 - 4x + 4}$ $\forall x : x \neq 2$

d) $\frac{1}{x^4 + 8}$

Una expresión algebraica es **irreducible** si no existen en ella factores comunes al numerador y al denominador.

a) $\frac{x}{x - 3}$ $\forall x : x \neq 3$ **Expresión irreducible**

b) $\frac{x^2 + x}{x^3 - 2x^2 - 3x} = \frac{x(x + 1)}{x(x^2 - 2x - 3)} = \frac{x(x + 1)}{x(x + 1)(x - 3)}$ $\forall x : x \neq 0 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 3$ **Expresión reducible**

factores comunes al numerador y al denominador

## Simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias

Para **simplificar** una expresión algebraica fraccionaria se debe factorizar el numerador y el denominador, y cancelar los factores comunes en ambos; se obtiene así una expresión irreducible equivalente a la original.

a) $\frac{x^2 + x}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{x(x + 1)}{x(x^2 - 2x + 1)} = \frac{x + 1}{(x - 1)^2}$ $\forall x : x \neq 0 \wedge x \neq 1$

b) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x + 1)(x - 2)} = \frac{1}{(x + 1)}$ $\forall x : x \neq \pm 1 \wedge x \neq 2$

c) $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = x + 2$ $\forall x : x \neq 2$

- Al simplificar, se deben identificar los valores de x que anulan el denominador.
- Algunas fracciones algebraicas resultan equivalentes a expresiones algebraicas enteras.
- El objeto de simplificar es reducir la expresión y poder efectuar operaciones en forma más sencilla.

# Expresiones algebraicas fraccionarias. Simplificación

PARADA PRÁCTICA 26

## VERIFICACIÓN 26

- **Marquen con una X las expresiones algebraicas fraccionarias.**

**1)** $3x^2 - \frac{1}{2}x - 5$ ☐ **2)** $5x^{-1}$ ☐ **3)** $\frac{x-2}{3}$ ☐ **4)** $(x+3) : x^5$ ☐

## APLICACIÓN 26

### Ejercicio 26.1

- **Simplifiquen las siguientes fracciones algebraicas.**

**1)** $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x}$

**4)** $\frac{x^3 - x^2}{x^3 + x^2 - 2x}$

**2)** $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}$

**5)** $\frac{x^5 - 16x}{x^2 - 2x}$

**3)** $\frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 - 25}$

PARADA TEÓRICA 27

# Multiplicación y división

## Multiplicación

El resultado de multiplicar dos expresiones algebraicas fraccionarias es otra expresión algebraica fraccionaria cuyo numerador y denominador son el producto de los numeradores y denominadores de las expresiones dadas.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x).R(x)}{Q(x).S(x)}$$

$$\frac{x^2}{x^2-4} \cdot \frac{x+2}{3x^3-x} = \frac{x^2}{(x+2)(x-2)} \cdot \frac{x+2}{x(3x^2-1)} = \frac{x}{(x-2)(3x^2-1)}$$

Se factorizan los numeradores y denominadores, se simplifica y luego se opera.

## División

El resultado de dividir dos expresiones algebraicas fraccionarias es otra expresión que se obtiene multiplicando la primera expresión por la recíproca de la segunda.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{S(x)}{R(x)}$$

$$\frac{x}{x-2} : \frac{x+2}{3x-1} = \frac{x}{x-2} \cdot \frac{3x-1}{x+2} = \frac{x(3x-1)}{(x-2)(x+2)}$$

Tanto en la multiplicación como en la división se debe simplificar siempre que sea posible.

a) $\frac{2x-3}{x+5} \cdot \frac{x^2-25}{6x-9} = \frac{(2x-3)(x-5)(x+5)}{(x+5).3(2x-3)} = \frac{x-5}{3}$

b) $\frac{x^2-2x+1}{x^3} : \frac{3x-3}{x} = \frac{(x-1)^2}{x^{32}} \cdot \frac{x}{3(x-1)} = \frac{x-1}{3x^2}$

# Multiplicación y división

PARADA PRÁCTICA 27

## VERIFICACIÓN 27

- **Resuelvan simplificando previamente.**

1) $\frac{3x^3}{2x} \cdot \frac{4x^2}{9x} =$

2) $\frac{5x^4}{3x} : \frac{10x}{21x^3} =$

## APLICACIÓN 27

### Ejercicio 27.1

- **Efectúen las siguientes multiplicaciones.**

1) $\frac{2}{x^2 - 3x} \cdot \frac{x - 3}{x} =$

2) $\frac{x - \frac{1}{2}}{x^2 - 2x + 4} \cdot (x^3 + 8) \cdot \frac{-8x}{2x^2 + 3x - 2} =$

### Ejercicio 27.2

- **Efectúen las siguientes divisiones.**

1) $\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} : \frac{2x^4 + 4x^3 + 8x^2}{2x^3 + 4x^2} =$

2) $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 1} : \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x - 2} =$

PARADA TEÓRICA

# 28 Adición y sustracción

Si las expresiones tienen **igual denominador**, se suman o restan sus numeradores según corresponda.

**a)** $\frac{x}{x-2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{x+x+2}{x-2} = \frac{2x+2}{x-2} = \frac{2(x+1)}{x-2}$

**b)** $\frac{1}{x-1} - \frac{2x-1}{x-1} = \frac{1-(2x-1)}{x-1} = \frac{1-2x+1}{x-1} = \frac{-2x+2}{x-1} = \frac{-2(x-1)}{x-1} = -2$

Para expresiones de **distinto denominador**, estas se deben transformar en otras, equivalentes a las dadas, que tengan el mismo denominador.

Este denominador (denominador común) es el mínimo común múltiplo (MCM) de los denominadores de las expresiones originales y se obtiene multiplicando los **factores comunes y no comunes** con su **mayor exponente**.

**a)** $\frac{x}{x-2} + \frac{3x-1}{x^2-2x} = \underbrace{\frac{x}{x-2} + \frac{3x-1}{x(x-2)}}_{\text{Se factorizan los denominadores.}} = \underbrace{\frac{x^2}{x(x-2)} + \frac{3x-1}{x(x-2)}}_{\text{Se halla el MCM y las fracciones equivalentes.}} = \underbrace{\frac{x^2+3x-1}{x(x-2)}}_{\text{Se suman los numeradores.}}$

**b)** $\frac{x}{x+1} - \frac{2}{x-1} = \underbrace{\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)}}_{\text{Se hallan el MCM y las fracciones equivalentes.}} = \underbrace{\frac{x^2-x-2x-2}{(x+1)(x-1)}}_{\text{Se restan los numeradores.}} = \frac{x^2-3x-2}{(x+1)(x-1)}$

**c)** $\frac{1}{2x-2} + \frac{2}{x^2-1} - \frac{x}{x+1} = \underbrace{\frac{1}{2(x-1)} + \frac{2}{(x+1)(x-1)} - \frac{x}{x+1}}_{\text{Se factorizan los denominadores.}}$

$= \underbrace{\frac{x+1}{2(x+1)(x-1)} + \frac{2.2}{2(x+1)(x-1)} - \frac{2x(x-1)}{2(x+1)(x-1)}}_{\text{Se halla el MCM y las fracciones equivalentes.}}$

$= \underbrace{\frac{x+1+4-2x(x-1)}{2(x+1)(x-1)} = \frac{x+5-2x^2+2x}{2(x+1)(x-1)} = \frac{-2x^2+3x+5}{2(x+1)(x-1)}}_{\text{Se obtiene la suma algebraica de los numeradores.}}$

$= \underbrace{\frac{(-2x+5)(x+1)}{2(x+1)(x-1)}}_{\text{Se factoriza el numerador y se simplifica.}} = \frac{-2x+5}{2(x-1)} = \frac{-2x+5}{2x-2}$

# Adición y sustracción

PARADA PRÁCTICA 28

**VERIFICACIÓN 28**

- **Efectúen las siguientes sumas y restas.**

1) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x} - \frac{5}{x} =$

2) $\frac{x}{2} + \frac{1}{x} + 1 =$

3) $\frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2} =$

4) $\frac{x}{2x-6} - \frac{3}{x-3} =$

**APLICACIÓN 28**

## Ejercicio 28.1

- **Efectúen las siguientes sumas y restas de igual denominador.**

1) $\frac{2x}{x+4} + \frac{8}{x+4} =$

2) $\frac{6x^2}{4x-8} - \frac{12x}{4x-8} =$

3) $\frac{2x - x^3}{x^2} - \frac{x(x+2)}{x^2} =$

4) $\frac{3x^3+1}{12x^2} + \frac{5x^3-1}{12x^2} =$

5) $\frac{1+x}{x^2-1} + \frac{5x^2+x}{x^2-1} - \frac{4x^2}{x^2-1} =$

# Adición y sustracción

## Ejercicio 28.2

- **Efectúen las siguientes operaciones.**

**1)** $\frac{10}{x-2} + \frac{8}{x+2} =$

**2)** $\frac{x^2+6x+9}{x+3} + \frac{x^2-9}{x-3} =$

**3)** $\frac{12}{x^2+2x} - \frac{2}{x} + \frac{6}{x+2} =$

**4)** $\frac{8}{x^2-4} + \frac{x+4}{x+2} =$

**5)** $\dfrac{x+5}{x^2+10x+25} - \dfrac{x+4}{x^2-16} =$

**6)** $\dfrac{1}{2x-1} + \dfrac{2x}{1-2x} =$

**7)** $\dfrac{x^2+2}{(x-2)(x^4-1)} - \dfrac{3x}{x^5-2x^4-x+2} =$

**8)** $\dfrac{7x^3}{(x+2)(x-2)} - \dfrac{24x}{x^2-4} + \dfrac{48}{x^3-4x} =$

PARADA TEÓRICA

# 29 Operaciones combinadas

Se denominan **operaciones combinadas** entre expresiones algebraicas fraccionarias a toda **suma algebraica de operaciones entre polinomios**.

Para resolver las operaciones combinadas se debe tener en cuenta la simplificación, multiplicación, división, suma y resta de fracciones algebraicas.

Para resolver una operación combinada se debe:

- separar en términos;
- efectuar las operaciones indicadas en cada término;
- si es posible, simplificar e indicar la condición de posibilidad.

**a)** $\dfrac{\dfrac{1}{x}-2}{\dfrac{x+1}{x^2}}-\dfrac{3x}{x+1}=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2x}{x}}{\dfrac{x+1}{x^2}}-\dfrac{3x}{x+1}=\dfrac{\dfrac{1-2x}{x}}{\dfrac{x+1}{x^2}}-\dfrac{3x}{x+1}$

$$=\frac{1-2x}{x}\cdot\frac{x^2}{x+1}-\frac{3x}{x+1}=\frac{x-2x^2}{x+1}-\frac{3x}{x+1}$$

$$=\frac{x-2x^2-3x}{x+1}=\frac{-2x^2-2x}{x+1}=\frac{-2x(x+1)}{x+1}=-2x$$

$$\forall x: x\neq 0 \wedge x\neq -1$$

**b)** $\dfrac{x^2+2x-3-x(x+3)}{\dfrac{x+3}{(x+4)^2}:\dfrac{4}{x+4}}=\dfrac{x^2+2x-3-x^2-3x}{\dfrac{x+3}{(x+4)^2}\cdot\dfrac{x+4}{4}}$

$$=\frac{-x-3}{\dfrac{x+3}{4(x+4)}}=-(x+3)\cdot\frac{4(x+4)}{x+3}$$

$$=-4(x+4)$$

$$\forall x: x\neq -3 \wedge x\neq -4$$

# Operaciones combinadas

PARADA PRÁCTICA 29

## VERIFICACIÓN 29

- **Resuelvan la siguiente operación combinada.**

$$\frac{x-1}{x-\frac{1}{x}} =$$

## APLICACIÓN 29

### Ejercicio 29.1

- **Efectúen las siguientes operaciones.**

1) $$\frac{\frac{x^2+7x+6}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}}{\frac{x^2+6x+5}{x^2-1}} =$$

2) $$\frac{\frac{x}{x-3}+\frac{2}{x^2-6x+9}}{\frac{x-2}{x-3}} =$$

# Operaciones combinadas

## Ejercicio 29.2

- **Resuelvan las siguientes operaciones combinadas.**

**1)** $\dfrac{\dfrac{x-7}{x^2-16}}{\dfrac{x^2-14x+49}{x+4}} - \dfrac{\dfrac{x+4}{x^2-16}}{4} =$

**2)** $\left(\dfrac{\dfrac{x}{1}}{\dfrac{1}{x}} : \dfrac{x^2}{\dfrac{1}{x^2}}\right) + \left(\dfrac{\dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}}{x^2}}{\dfrac{1}{x^4}}\right) =$

**3)** $\dfrac{\dfrac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{(x+1)^2}}{\dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{(x-1)^2}} + \dfrac{x^2 - 1}{(x+1)^2} =$

**4)** $\dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 2x - 3} \cdot \dfrac{x - 3}{x^2 + 10x + 25} - \dfrac{x + 5}{x^2 + 6x + 5} =$

PARADA TEÓRICA 30

# Ecuaciones fraccionarias

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ tales que $Q(x)$ no sea nulo, se denomina ecuación fraccionaria a toda expresión del tipo $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$.

Resolver una ecuación fraccionaria es encontrar las raíces del numerador $P(x)$ que no anulen al denominador $Q(x)$. Si alguna de las raíces del numerador es igual a alguna de las raíces del denominador, ésta debe ser descartada, ya que no es solución de la ecuación planteada.

Luego se debe verificar en la ecuación original los valores de x hallados.

**a)** $\frac{3}{x-1} + \frac{1}{x^2-1} = 0 \quad \forall x : x \neq 1 \wedge x \neq -1$

$$\frac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{1}{(x-1)(x+1)} = 0$$

$$\frac{3x+3+1}{(x-1)(x+1)} = 0$$

$$3x + 4 = 0$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

**b)** $\frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} - 2 = 0 \quad \forall x : x \neq 0$

$$\frac{5x}{x^2} + \frac{3}{x^2} - \frac{2x^2}{x^2} = 0$$

$$\frac{-2x^2 + 5x + 3}{x^2} = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-2).3}}{2(-2)}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{-4} = \frac{-5 \pm 7}{-4}$$

$$x_1 = \frac{-5+7}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-5-7}{-4} = 3$$

**c)** $\frac{2x-4}{x} = x - 2 \quad \forall x : x \neq 0$

$$2x - 4 = (x-2)x$$

$$2x - 4 = x^2 - 2x$$

$$0 = x^2 - 4x + 4$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$$|x - 2| = 0$$

$$x = 2$$

**d)** $\frac{2}{x-2} + 1 = \frac{x-1}{x+3} \quad \forall x : x \neq 2 \wedge x \neq -3$

$$\frac{2}{x-2} + \frac{x-2}{x-2} = \frac{x-1}{x+3}$$

$$\frac{2+x-2}{x-2} = \frac{x-1}{x+3}$$

$$\frac{x}{x-2} = \frac{x-1}{x+3}$$

$$x(x+3) = (x-1)(x-2)$$

$$x^2 + 3x = x^2 - 2x - x + 2$$

$$3x + 3x = 2$$

$$x = \frac{1}{3}$$

# Ecuaciones fraccionarias

PARADA PRÁCTICA 30

## VERIFICACIÓN 30

- **Encierren el valor que verifica la siguiente ecuación.**

$\frac{1}{x+1} + 2 = \frac{2x+3}{2x}$ **a)** $x = 0$ **b)** $x = -1$ **c)** $x = 2$ **d)** $x = 1$

## APLICACIÓN 30

### Ejercicio 30.1

- **Resuelvan las siguientes ecuaciones fraccionarias.**

**1)** $\frac{6}{x} - \frac{9}{x^2} - 1 = 0$

**2)** $\frac{2}{x-2} - \frac{3}{x^2-2x} = 1$

**3)** $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{x^2-5}{x^2-1}$

**4)** $\frac{x^2}{4} - \frac{4}{x^2} = \frac{x}{2} - \frac{2}{x}$

# TRAMO D: ejercitación final

INTEGRACIÓN D

## Ejercicio D.1

- **Simplifiquen las siguientes expresiones.**

**1)** $\dfrac{x^2 + 9 - 6x}{x^2 - 9}$

**2)** $\dfrac{12x^2 - 3}{x^2 + \frac{1}{2}x}$

**3)** $\dfrac{-x^2 - 14x - 49}{2x^2 + 12x - 14}$

**4)** $\dfrac{2x - 2x^2}{x^3 - 2x^2 + x}$

**5)** $\dfrac{x^2 - x - 6}{2x^2 - 8}$

**6)** $\dfrac{x^4 - 27x}{2x^2 - 6x}$

## Ejercicio D.2

● **Efectúen las siguientes sumas y restas.**

**1)** $\frac{2}{x-5} - \frac{10}{x^2-5} - \frac{1}{x+5} =$

**2)** $\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} =$

**3)** $\frac{-1}{2(x-1)} + \frac{x}{2x-4} - \frac{1}{2x^2-6x+4} =$

**4)** $\frac{x}{3x-9} - \frac{6}{x^2-9} =$

# TRAMO D: ejercitación final

## Ejercicio D.3

**• Efectúen las siguientes multiplicaciones y divisiones.**

**1)** $\frac{x^2 - 9}{2x + 4} \cdot \frac{x + 2}{x^2 - 4x + 3} \cdot (x + 1) =$

**2)** $\frac{1}{x} \cdot \frac{x + 1}{x^2 + x} \cdot \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} =$

**3)** $\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 4x + 4} \cdot \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} =$

**4)** $\frac{\frac{x^2 - 4}{x^4 - 16}}{\frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}} =$

## Ejercicio D.4

**• Resuelvan la siguiente operación combinada.**

$$\frac{1 + \frac{1}{x + 2}}{\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} : \frac{2x^4 + 4x^3 + 8x^2}{2x^3 + 4x^2}} =$$

## Ejercicio D.5

● **Resuelvan las siguientes ecuaciones.**

**1)** $3x - \frac{6}{x} = -3$

**2)** $\frac{x-5}{x} = \frac{1}{2}$

**3)** $\frac{1}{x+1} - 3 = 0$

**4)** $\frac{1}{2x} + \frac{1}{x} - \frac{15}{x^2} = 0$

**5)** $\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2-1} = 1$

**6)** $\frac{x}{x+2} + \frac{x}{x-1} = 0$

# TRAMO D: ejercitación final

## Ejercicio D.6

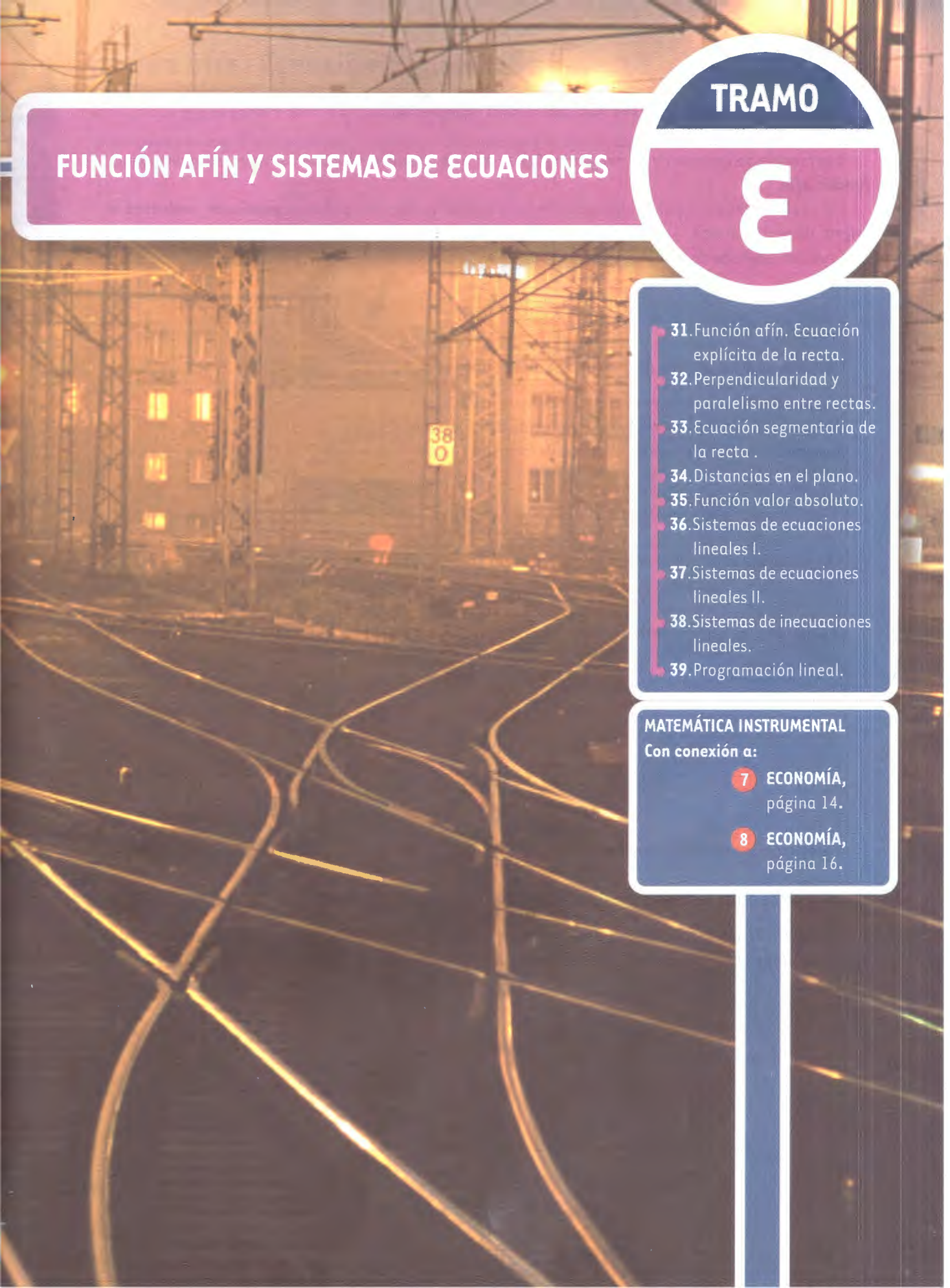
● **Resuelvan las siguientes ecuaciones.**

1) $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 7x + 10} = \dfrac{\frac{1}{2}}{x - 2}$

2) $\dfrac{2}{x^2 - 1} = \dfrac{-12}{4x - 4} - \dfrac{3x^2 + 6x + 3}{3x^2 - 3}$

3) $\dfrac{x^2}{x^2 - 4} - \dfrac{x + 2}{x^3 - 2x^2} = \dfrac{2}{x^2 + 2x}$

4) $\dfrac{1}{x^3 + 4x^2 + 4x} - \dfrac{x - 1}{x + 2} = \dfrac{1}{x^2 + 4x + 4}$



# FUNCIÓN AFÍN Y SISTEMAS DE ECUACIONES

TRAMO

ε


31. Función afín. Ecuación explícita de la recta.
32. Perpendicularidad y paralelismo entre rectas.
33. Ecuación segmentaria de la recta .
34. Distancias en el plano.
35. Función valor absoluto.
36. Sistemas de ecuaciones lineales I.
37. Sistemas de ecuaciones lineales II.
38. Sistemas de inecuaciones lineales.
39. Programación lineal.


**MATEMÁTICA INSTRUMENTAL**

**Con conexión a:**


7 **ECONOMÍA,** página 14.

8 **ECONOMÍA,** página 16.

PARADA TEÓRICA 31

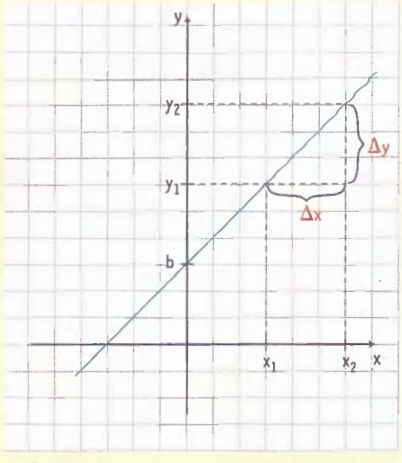
# Función afín. Ecuación explícita de la recta

*A la función polinómica de primer grado* $f(x) = ax + b$*, siendo* $a$ *y* $b$ *números reales, se la denomina* ***función afín.***

Los coeficientes principal e independiente de la función reciben el nombre de **pendiente** y **ordenada al origen**, respectivamente.

Ecuación **explícita** de la recta: $y = ax + b$ → Ordenada al origen

↓ Pendiente




La representación gráfica de una función **afín** es una **recta**.

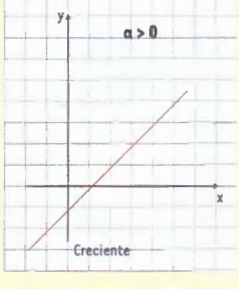
• *La* ***pendiente*** *de una recta es el cociente entre la variación de la variable dependiente* $(\Delta y)$ *y la variación de la variable independiente* $(\Delta x)$ *de cualquier punto de la misma.*

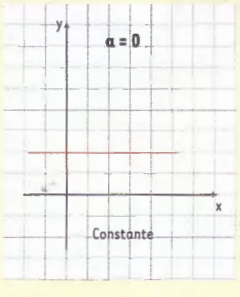
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

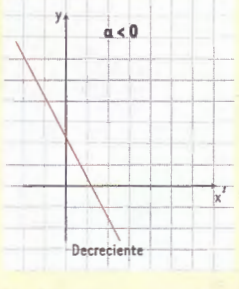
• *La ordenada al origen es el valor donde la recta corta al eje y.*

$$f(0) = b$$

El valor de la pendiente determina que una función afín sea **creciente**, **constante** o **decreciente**.



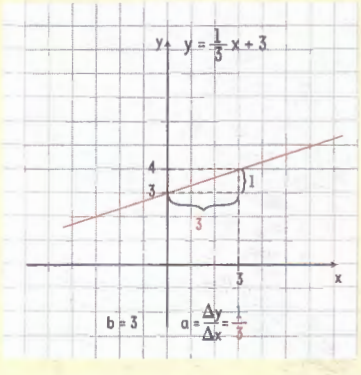



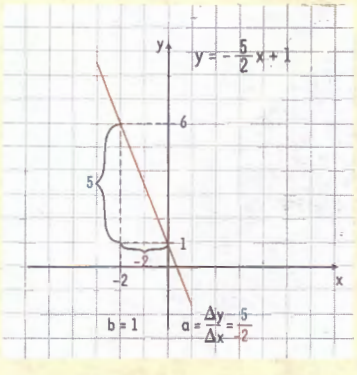




A las funciones afines que pasan por el origen de coordenadas (0;0), se las denomina funciones **lineales**.

## Representación gráfica de una función afín dada en forma explícita

Para graficar una función afín se debe marcar la ordenada al origen (b) y ,a partir de ella, representar un par de valores cuyo cociente sea igual al valor de la pendiente (a).



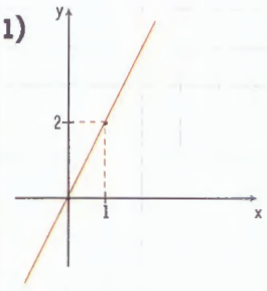
# Función afín. Ecuación explícita de la recta

PARADA PRÁCTICA 31

## VERIFICACIÓN 31

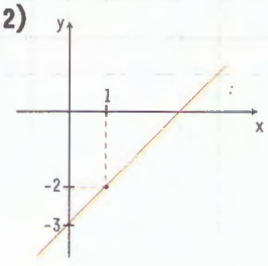
● **Marquen con una X la ecuación que corresponde a cada una de las siguientes funciones afines.**

**1)**




| | |
|---|---|
| $y = 2x$ | |
| $y = 2$ | |
| $y = x$ | |

**2)**

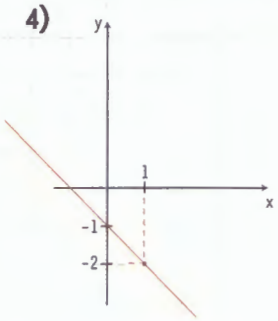



| | |
|---|---|
| $y = x + 3$ | |
| $y = x - 3$ | |
| $y = 3x$ | |

**3)**

| | |
|---|---|
| $y = 4x$ | |
| $y = -4x$ | |
| $y = -\frac{1}{4}x$ | |

**4)**




| | |
|---|---|
| $y = -x + 1$ | |
| $y = x - 1$ | |
| $y = -x - 1$ | |

## APLICACIÓN 31

### Ejercicio 31.1

● **Representen las siguientes funciones a partir de la ordenada al origen y la pendiente.**

**1)** $y = \frac{1}{2}x$

**2)** $y = -x + 2$

**3)** $y = \frac{2}{3}x - 1$

**4)** $y = -\frac{1}{4}x + 3$

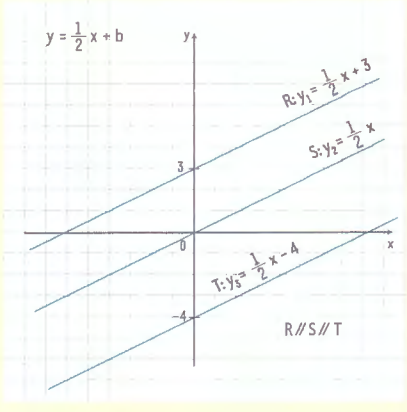
PARADA TEÓRICA 32

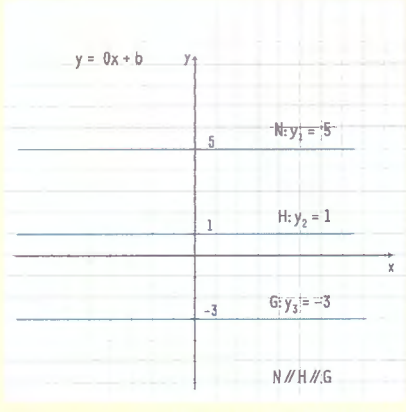
# Perpendicularidad y paralelismo entre rectas

## Rectas paralelas

*Dos rectas son paralelas si y solo si sus pendientes son iguales.*

$M: y = a_1.x + b_1 \ \wedge \ P: y = a_2.x + b_2 \ \wedge \ M \,//\, P \ \Leftrightarrow \ a_1 = a_2$

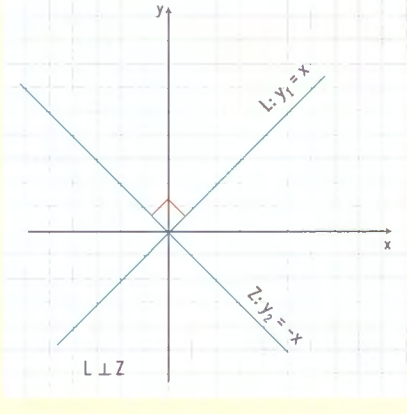


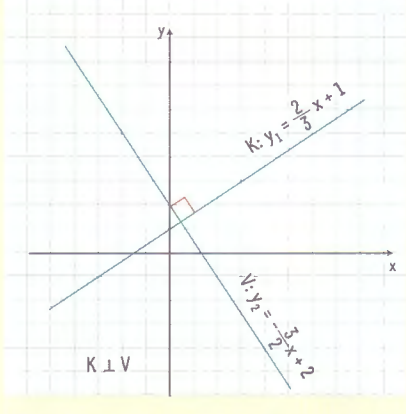




## Rectas perpendiculares

*Dos rectas son perpendiculares si y solo si sus pendientes son inversas y opuestas.*

$S: y = a_1.x + b_1 \ \wedge \ N: y = a_2.x + b_2 \ \wedge \ S \perp N \ \Leftrightarrow \ a_1 = -\frac{1}{a_2}$




a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2;1)$ y es paralela a $y = 5x + 1$.

$x = 2 \quad \wedge \quad y = 1 \quad \wedge \quad a = 5$

$y = ax + b \ \Rightarrow \ 1 = 5.2 + b \ \Rightarrow \ 1 = 10 + b \ \Rightarrow \ b = -9$

$y = 5x - 9$

b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1;3)$ y es perpendicular a $y = -2x + 4$.

$x = -1 \quad \wedge \quad y = 3 \quad \wedge \quad a = \frac{1}{2}$

$y = ax + b \ \Rightarrow \ 3 = \frac{1}{2}(-1) + b \ \Rightarrow \ 3 = -\frac{1}{2} + b \ \Rightarrow \ b = \frac{7}{2}$

$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

# Perpendicularidad y paralelismo entre rectas

PARADA PRÁCTICA 32

## VERIFICACIÓN 32

● **Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda en cada caso.**

**1)** $y = 2x + 1 \,//\, y = 2$ ☐

**2)** $y = \frac{1}{3}x \perp y = -3x + 2$ ☐

**3)** $y = x - 1 \,//\, y = -x + 1$ ☐

**4)** $y = 2 \,//\, y = -5$ ☐

**5)** $y = 1 - x \perp y = -1 + x$ ☐

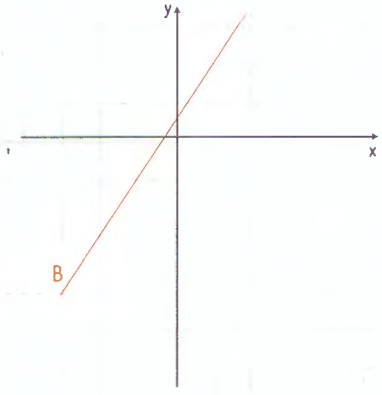
**6)** $y = 3 \perp y = -\frac{1}{3}$ ☐

## APLICACIÓN 32

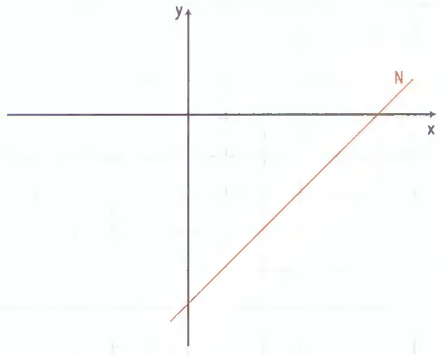
### Ejercicio 32.1

● **Hallen gráficamente.**

**1)** La recta A, que pase por el punto (2;-3) y sea paralela a la recta B.




**2)** La recta M, que pase por el punto (-4;1) y sea perpendicular a la recta N.




### Ejercicio 32.2

● **Hallen y grafiquen.**

**1)** La ecuación de la recta paralela a $y = \frac{1}{3}x + 1$ que pase por el punto (-3;2).

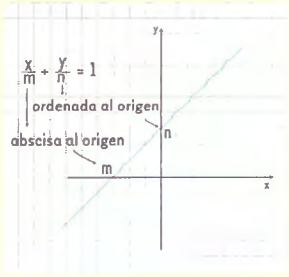
**2)** La ecuación de la recta perpendicular a $y = 2x - 3$ que pase por el punto (-2;-1).

PARADA TEÓRICA

# 33 Ecuación segmentaria de la recta

*Toda ecuación de la forma* $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$, *representa una recta en forma* ***segmentaria***.

*Los denominadores m y n representan a la abscisa y a la ordenada al origen, respectivamente.*

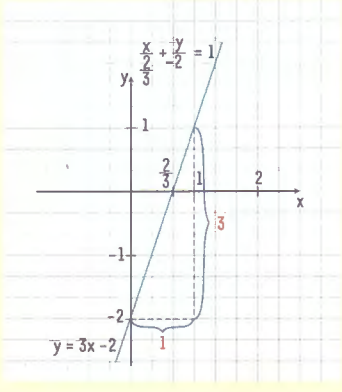



Dada la recta $y = 3x - 2$, para pasar de la ecuación explícita a la segmentaria se procede de la siguiente manera:

$$y = 3x - 2 \Rightarrow 3x - y = 2$$

$$\frac{3x - y}{2} = \frac{2}{2} \Rightarrow \frac{3x}{2} + \frac{y}{-2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{2}{3}} + \frac{y}{-2} = 1$$

Para representar gráficamente una función afín en forma segmentaria se determinan sobre los ejes las intersecciones con la recta y luego se traza la misma.




## Ecuación de una recta, dadas la pendiente y un punto de la misma

Fórmula para hallar la ecuación de una recta, dada su pendiente (a) y un punto perteneciente a la misma $(x_1;y_1)$.

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

La ecuación explícita de una recta cuya pendiente es 2 y pasa por el punto (1;3) es:

$y - 3 = 2(x - 1) \Rightarrow y - 3 = 2x - 2 \Rightarrow y = 2x - 2 + 3 \Rightarrow$ $\mathbf{y = 2x + 1}$

## Ecuación de una recta, dados dos puntos de la misma

Fórmula para hallar la ecuación de una recta, dados dos puntos pertenecientes a ella: $(x_1;y_1)$ y $(x_2;y_2)$.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

La ecuación explícita de una recta que pasa por los puntos (2;1) y (5;3) es:

$(\underbrace{2}_{x_1};\underbrace{1}_{y_1})$ y $(\underbrace{5}_{x_2};\underbrace{3}_{y_2})$

$$\frac{y - 1}{3 - 1} = \frac{x - 2}{5 - 2} \Rightarrow \frac{y - 1}{2} = \frac{x - 2}{3} \Rightarrow y - 1 = \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right).2 \Rightarrow$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} + 1 \Rightarrow \mathbf{y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}$$

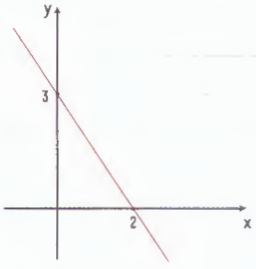
# Ecuación segmentaria de la recta



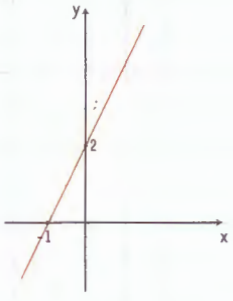
## VERIFICACIÓN 33

● **Escriban la ecuación explícita y segmentaria de cada una de las siguientes rectas.**

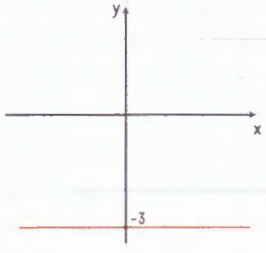
**1)**




**2)**




**3)**




ESCUELA MEDIA Nº 13
BIBLIOTECA

## APLICACIÓN 33

### Ejercicio 33.1

● **Hallen la ecuación segmentaria de cada una de las siguientes rectas.**

**1)** $y = 2x - 4$ **2)** $y = -\frac{1}{2}x + 3$ **3)** $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$

### Ejercicio 33.2

● **Hallen la ecuación explícita de cada una de las siguientes rectas.**

**1)** $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$ **2)** $\frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{y}{-2} = 1$ **3)** $\frac{x}{-\frac{5}{2}} + \frac{y}{\frac{1}{4}} = 1$

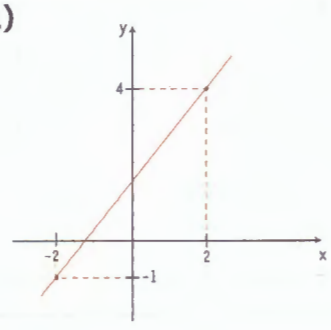
INVENTARIO 3561/02

# Ecuación segmentaria de la recta

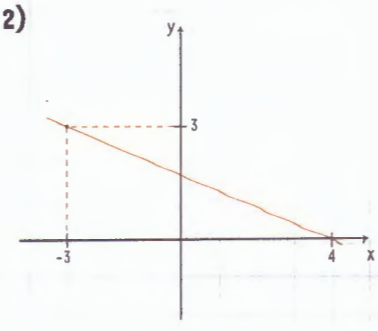
## Ejercicio 33.3

● **Escriban la ecuación explícita de cada una de las siguientes rectas.**

**1)**



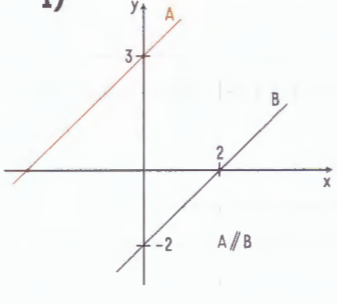

**2)**



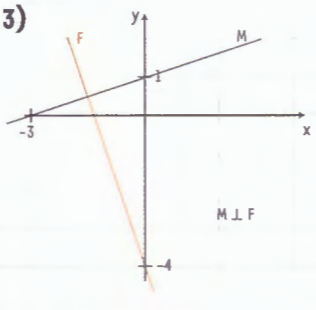

## Ejercicio 33.4

● **Hallen la ecuación explícita de cada una de las rectas trazadas en rojo.**

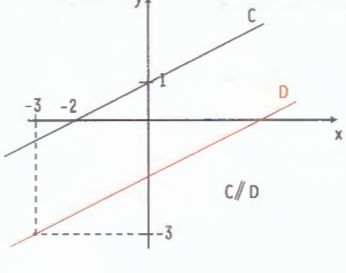
**1)**



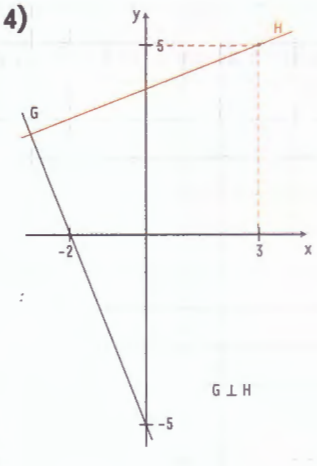

**3)**




**2)**




**4)**



## Ejercicio 33.5

**● Hallen la ecuación de la recta que cumple cada una de las siguientes condiciones.**

**1) A:** pasa por el punto $(1;5)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $(-2;3)$ y $(0;-1)$.

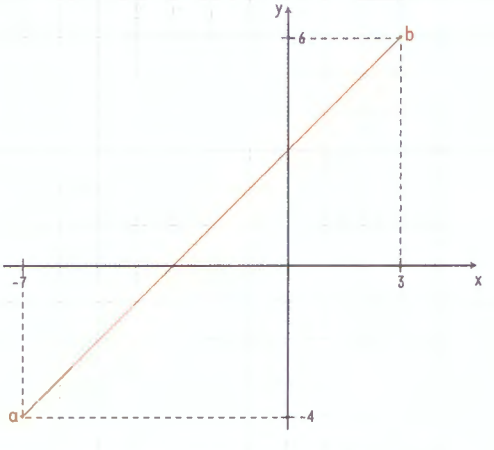
**2) B:** corta al eje x en $x_0 = 2$ y es paralela a la recta $\frac{x}{-1} + \frac{y}{2} = 1$.

**3) C:** pasa por el punto $(-2;-1)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(-1;4)$ y $(3;1)$.

**4) D:** corta al eje y en $y_0 = 3$ y es perpendicular a la recta $\frac{x}{\frac{2}{3}} + \frac{y}{-1} = 1$.

## Ejercicio 33.6

**● Hallen gráfica y analíticamente la recta mediatriz del segmento $\overline{ab}$.**



PARADA TEÓRICA

# 34 Distancias en el plano

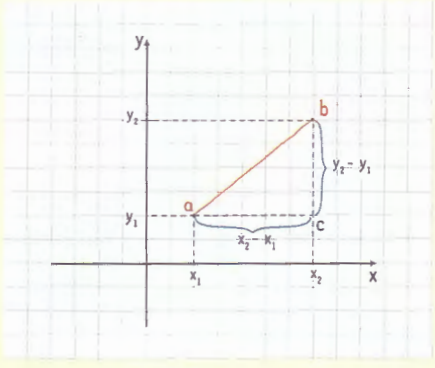
*La **distancia** entre dos puntos es la longitud del segmento que tiene a dichos puntos por extremos.*

Para calcular la distancia entre dos puntos se aplica el teorema de Pitágoras.

Sean los puntos: $a = (x_1;y_1)$ y $b = (x_2;y_2)$.

$$\overline{ab}^2 = \overline{ac}^2 + \overline{bc}^2 \Rightarrow \overline{ab} = \sqrt{\overline{ac}^2 + \overline{bc}^2}$$

$$D_{(a,b)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

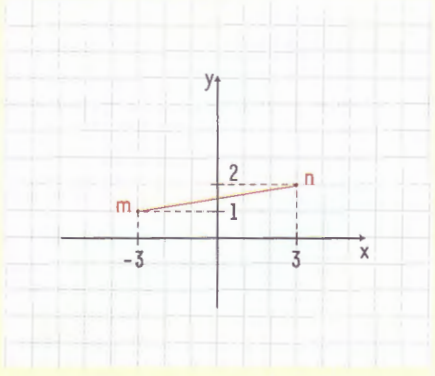



La distancia entre m y n es:

$m = (\underbrace{-3}_{x_1}; \underbrace{1}_{y_1}) \wedge n = (\underbrace{3}_{x_2}; \underbrace{2}_{y_2})$

$$D_{(m,n)} = \sqrt{(3 - (-3))^2 + (2 - 1)^2}$$

$$D_{(m,n)} = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37}$$

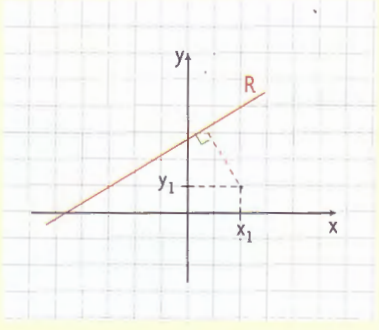



## Distancia de un punto a una recta

*La distancia de una recta a un punto no perteneciente a la misma, es la longitud del segmento perpendicular a la recta que tiene por extremos a un punto de la misma y al punto considerado.*

La distancia de un punto $p = (x_1;y_1)$ a una recta.
R: $Ax + By + C = 0$ está dada por la siguiente fórmula:

$$D_{(R,p)} = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$



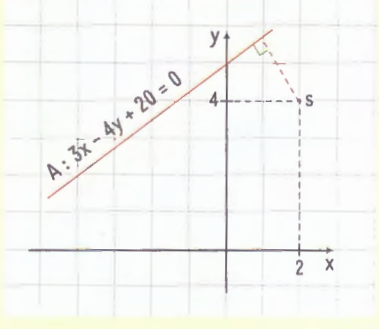

Calcular la distancia:

del punto $s = (2;4)$ a la recta A: $y = \frac{3}{4}x + 5$.

$$A: \frac{3}{4}x - y + 5 = 0 \Rightarrow A: 3x - 4y + 20 = 0$$

$$D_{(A,s)} = \left| \frac{3.2 - 4.4 + 20}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \right|$$

$$D_{(A,s)} = \left| \frac{6 - 16 + 20}{\sqrt{25}} \right| = \left| \frac{10}{5} \right| = 2$$



# Distancias en el plano

PARADA PRÁCTICA 34

**VERIFICACIÓN 34**

- **Calculen.**

**1)** La distancia entre a $= (-2;4)$ y b $= (1;-3)$.

**2)** La distancia entre p $= (2,1)$ y la recta C: $3x + 2y - 5 = 0$.

**APLICACIÓN 34**

## Ejercicio 34.1

Dados los puntos: a $= (3;2)$, b $= (-1;4)$ y c $= (1;-3)$.

- **Tracen el triángulo abc y calculen su perímetro.**

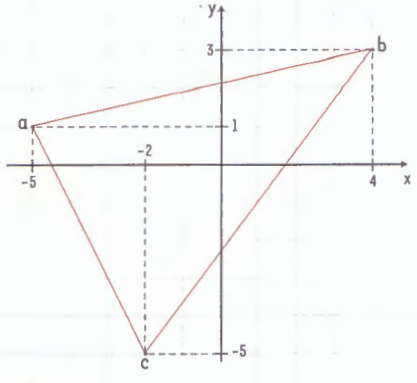
## Ejercicio 34.2

- **Calculen.**

La distancia de la recta S, que pasa por los puntos m $= (-1;3)$ y n $= (2;-1)$, al origen de coordenadas.

## Ejercicio 34.3

- **Hallen la medida de la mediana correspondiente al lado $\overline{bc}$.**



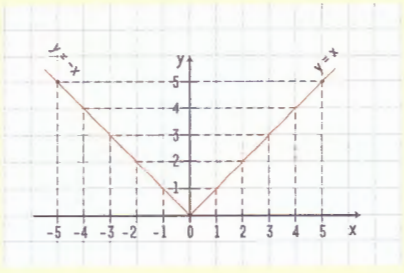
PARADA TEÓRICA 35

# Función valor absoluto

Se define la función módulo o valor absoluto como:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

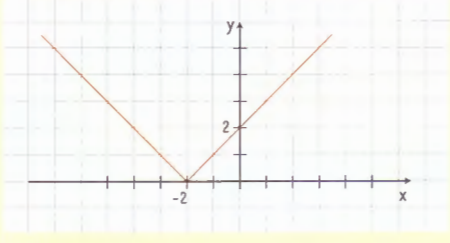
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$$




**1)** Funciones de la forma: $f(x) = |x + c|$

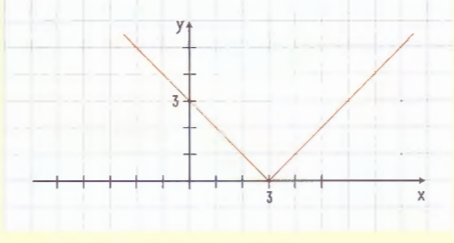
- Si $c > 0$, la función $|x|$ queda desplazada c unidades **hacia la izquierda.**

  $f(x) = |x + 2|$




- Si $c < 0$, la función $|x|$ queda desplazada c unidades **hacia la derecha.**

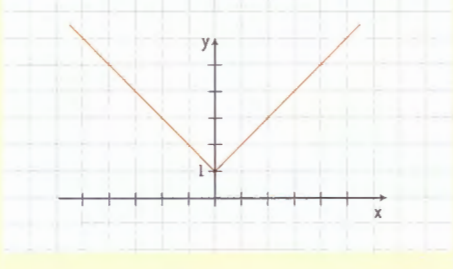
  $f(x) = |x - 3|$




**2)** Funciones de la forma: $f(x) = |x| + b$

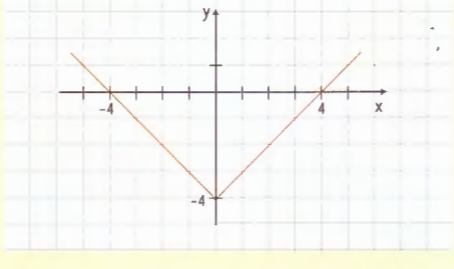
- Si $b > 0$, la función $|x|$ queda desplazada b unidades **hacia arriba.**

  $f(x) = |x| + 1$




- Si $b < 0$, la función $|x|$ queda desplazada b unidades **hacia abajo.**

  $f(x) = |x| - 4$




Para graficar ciertas funciones, se deben redefinir las mismas aplicando la definición de valor absoluto.

$f(x) = -3|2x - 4| + 1$

**a)** $2x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

$f(x) = -3(2x - 4) + 1 = -6x + 12 + 1$

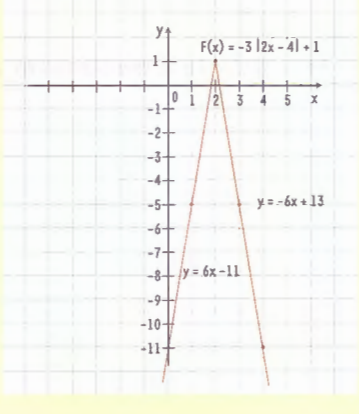
$f(x) = -6x + 13 \Leftrightarrow x \geq 2$

**b)** $2x - 4 < 0 \Rightarrow x < 2$

$f(x) = -3(-2x + 4) + 1 = 6x - 12 + 1$

$f(x) = 6x - 11 \Leftrightarrow x < 2$

$$f(x) = \begin{cases} -6x + 13 & \text{si } x \geq 2 \\ 6x - 11 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$



# Función valor absoluto

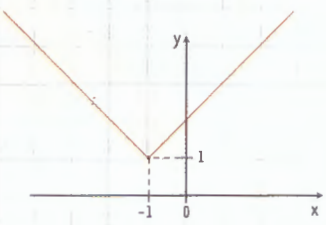
PARADA PRÁCTICA 35

## VERIFICACIÓN 35

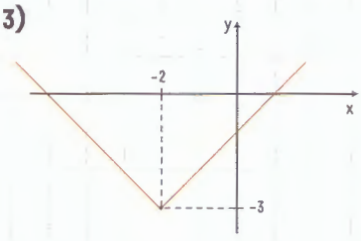
● **Escriban debajo de cada uno de los gráficos la fórmula de la función correspondiente.**

**1)**

**2)**




**3)**




## APLICACIÓN 35

### Ejercicio 35.1

● **Representen cada una de las siguientes funciones.**

**1)** $f(x) = 2|x - 1| + 3$

**2)** $f(x) = -|3x + 2| - 1$

**3)** $f(x) = -\frac{1}{2}|2x - 1| - \frac{3}{2}$

PARADA TEÓRICA

# 36 Sistemas de ecuaciones lineales I

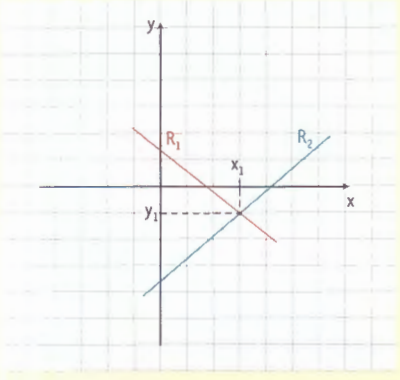
Un sistema de ecuaciones lineales formado por dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas cada una, representa dos rectas en el plano, y resolverlo es hallar la intersección de ambas (conjunto solución).

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Dos rectas en un plano pueden ser **incidentes** (tienen un punto en común) o **paralelas** (no tienen ningún punto en común o son coincidentes).

Los sistemas se clasifican en **compatibles e incompatibles**, según tengan o no solución; los sistemas compatibles pueden ser **determinados** o **indeterminados**, según tengan una o infinitas soluciones.

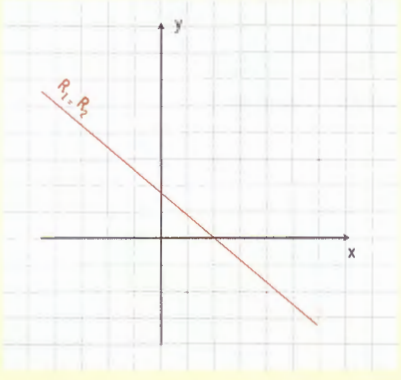
*Rectas **incidentes***




$R_1 \cap R_2 = (x_1;y_1)$

Determinado (solución única)

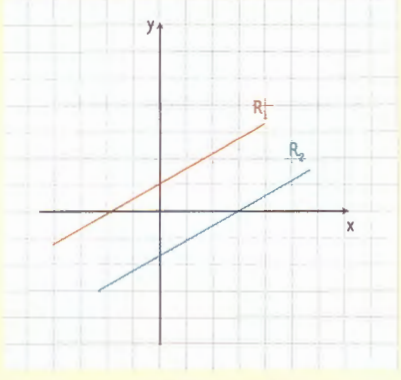
*Rectas **paralelas***




$R_1 \cap R_2 = R_1 = R_2$

Indeterminado (infinitas soluciones)

Sistema compatible




$R_1 \cap R_2 = \varnothing$

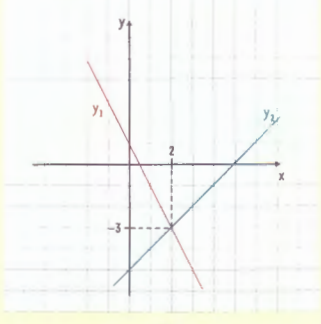
Sistema incompatible (no tiene solución)

## Resolución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales

Para resolver gráficamente un sistema de ecuaciones, se deben representar ambas rectas en un mismo sistema de ejes y hallar la intersección de ambas.

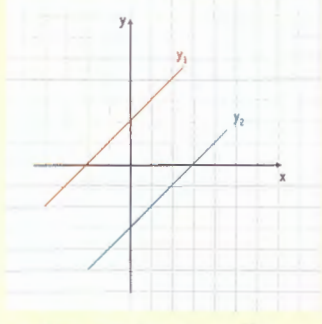
**a)** $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -2x + 1 \\ y_2 = x - 5 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} -x + y = 2 \\ -x + y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = x + 2 \\ y_2 = x - 3 \end{cases}$




**Sistema compatible determinado**

**S = {(2;-3)}**




**Sistema incompatible**

**S = ∅**

# Sistemas de ecuaciones lineales I

PARADA PRÁCTICA 36

## VERIFICACIÓN 36

- **Analicen y clasifiquen cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones.**

**1)** $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 3x + 4 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} y = -x + 7 \\ x + y = -2 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} x - y = 0 \\ y = x \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

## APLICACIÓN 36

### Ejercicio 36.1

- **Resuelvan gráficamente y clasifiquen cada uno de los siguientes sistemas.**

**1)** $\begin{cases} -3x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

**2)** $\begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = -\frac{1}{4} \\ 3x - 4y = \frac{3}{2} \end{cases}$

**3)** $\begin{cases} x - \frac{1}{3}y = 2 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$

PARADA TEÓRICA 37

# Sistemas de ecuaciones lineales II

Para resolver analíticamente un sistema de ecuaciones existen varios métodos. Todos ellos permiten obtener el mismo resultado, y la utilización de uno u otro dependerá de cómo está planteado el sistema original.

## Método de sustitución

*Se debe despejar una de las variables en una de las ecuaciones, y luego reemplazarla en la otra ecuación.*

$\begin{cases} x - y = 1 & (a) \\ 2x - 3y = 1 & (b) \end{cases}$ Se despeja x en la ecuación (a): $x = 1 + y$

Se reemplaza la "x" por "1 + y" en la ecuación (b): $2(1 + y) - 3y = 1$

Se resuelve la ecuación, obteniéndose el valor de "y":

$2 + 2y - 3y = 1 \Rightarrow 2 - y = 1 \Rightarrow -y = 1 - 2 \Rightarrow -y = -1 \Rightarrow \mathbf{y = 1}$

Se reemplaza el valor de "y" obtenido, en cualquiera de las dos ecuaciones, y se calcula el de "x":

$x - 1 = 1 \Rightarrow \mathbf{x = 2}$

Se escribe el conjunto solución: $\mathbf{S = \{(2;1)\}}$

## Método de igualación

*Se debe despejar en ambas ecuaciones la misma incógnita y luego igualar las ecuaciones obtenidas.*

$\begin{cases} 2x - 3y = 9 & (a) \\ x + y = -8 & (b) \end{cases}$ Se despeja "x" de ambas ecuaciones.

$(a): x = \dfrac{9 + 3y}{2}$ $\qquad$ $(b): x = -8 - y$

Se igualan ambas ecuaciones y se calcula el valor de "y":

$\dfrac{9 + 3y}{2} = -8 - y \Rightarrow 9 + 3y = -16 - 2y \Rightarrow 3y + 2y = -16 - 9 \Rightarrow 5y = -25 \Rightarrow \mathbf{y = -5}$

Se reemplaza el valor de "y" obtenido, en cualquiera de las dos ecuaciones, y se calcula el de "x":

$x + (-5) = -8 \Rightarrow -5 + x = -8 \Rightarrow \mathbf{x = -3}$

Se escribe el conjunto solución: $\mathbf{S = \{(-3;-5)\}}$

## Método de reducción por sumas y restas

*Se "igualan" los coeficientes de una de las incógnitas en ambas ecuaciones multiplicando ambos miembros convenientemente, obteniéndose un* ***sistema equivalente*** *al dado, y luego se suman o restan ambas ecuaciones para eliminarla.*

$\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ 3x - 3y = 15 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} (5x + 2y).3 = 4.3 \\ (3x - 3y).2 = 15.2 \end{cases}}_{\text{Se igualan los coeficientes de "y"}} \Rightarrow \underbrace{\begin{array}{l} \begin{cases} 15x + 6y = 12 \\ 6x - 6y = 30 \end{cases} + \\ \hline 21x \quad = 42 \end{array}}_{\text{Se suman las ecuaciones miembro a miembro}}$

Se calcula el valor de "x": $21x = 42 \Rightarrow \mathbf{x = 2}$

Se reemplaza el valor de "x" obtenido, en cualquiera de las dos ecuaciones, y se calcula el de "y":

$5.2 + 2y = 4 \Rightarrow 2y = -6 \Rightarrow \mathbf{y = -3}$

Se escribe el conjunto solución: $\mathbf{S = \{(2;-3)\}}$

# Sistemas de ecuaciones lineales II

PARADA PRÁCTICA 37

## VERIFICACIÓN 37

- **Escribir un sistema equivalente al dado, con los coeficientes de "x" iguales en ambas ecuaciones.**

$$\begin{cases} -6x + 5y = -2 \\ 4x - 3y = 7 \end{cases}$$

## APLICACIÓN 37

### Ejercicio 37.1

- **Resuelvan los siguientes sistemas por el método de sustitución.**

1) $\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{2}{3}x - 5y = -3 \\ 2x + \frac{1}{2}y = \frac{13}{2} \end{cases}$

### Ejercicio 37.2

- **Resuelvan los siguientes sistemas por el método de igualación.**

1) $\begin{cases} 2x - 2y = \frac{3}{2} \\ 3x + y = \frac{5}{4} \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x - \frac{1}{2}y = \frac{6}{5} \\ 2x - \frac{5}{3}y = \frac{4}{3} \end{cases}$

# Sistemas de ecuaciones lineales II

## Ejercicio 37.3

- **Resuelvan los siguientes sistemas por el método de reducción.**

1) $\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}y = -5 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{6}y = \frac{3}{2} \end{cases}$

## Ejercicio 37.4

- **Resuelvan, por el método más conveniente, cada uno de los siguientes sistemas.**

1) $\begin{cases} 2(x + 3) - \frac{1}{3}y = 7 \\ \frac{5x - 2}{3} + \frac{y - 1}{2} = 2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x - 2)(x + 5) = x(x - 1) + y \\ \frac{x + y}{5} + 1 = 2(x - y) \end{cases}$

## Ejercicio 37.5

**● Planteen y resuelvan cada uno de los siguientes problemas.**

**1)** La diferencia entre dos números es 3, y la suma entre el mayor de ellos y el doble del menor es 27. ¿Cuáles son los números?

**2)** Si la diferencia entre dos números de dos cifras, cuyas cifras son iguales pero en distinto orden, es 36 y la suma de las cifras de cualquiera de los dos números es 10, ¿cuáles son los números?

**3)** En una alcancía hay 32 monedas de $ 0,25 y $ 0,05. Si en total hay $ 5, ¿cuántas monedas de cada valor hay en la alcancía?

**4)** En un trapecio isósceles la base mayor es el doble que la menor y su perímetro es de 42 cm. Si cada uno de los lados iguales es $\frac{3}{10}$ de la base mayor, ¿cuánto mide la base media del trapecio?

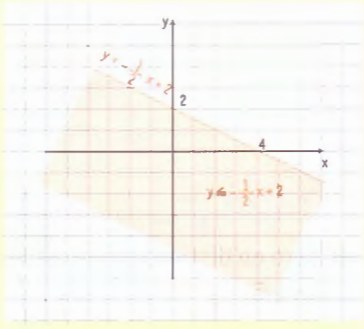
PARADA TEÓRICA

38

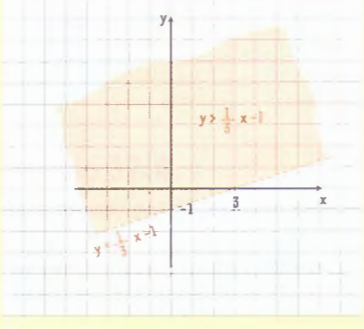
# Sistemas de inecuaciones lineales

*Una inecuación de primer grado con una o dos incógnitas determina una región del plano.*

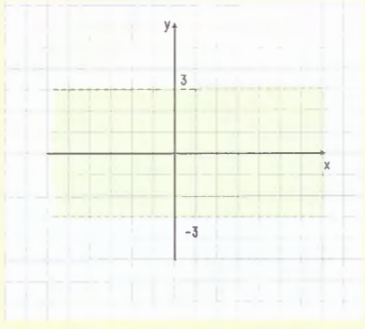
**a)** $y \leq -\frac{1}{2}x + 2$



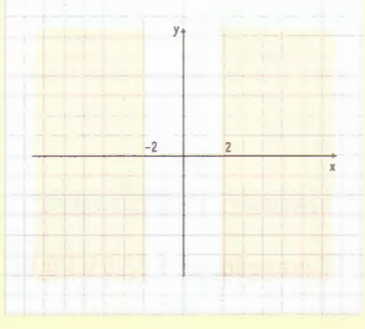

**b)** $y > \frac{1}{3}x - 1$




**c)** $|y| < 3 \Rightarrow -3 < y < 3$



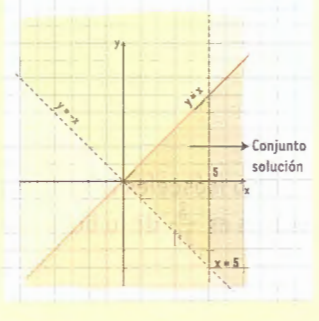

**d)** $|x| \geq 2 \Rightarrow x \leq -2 \vee x \geq 2$




*Un **sistema de inecuaciones lineales** es un conjunto de varias inecuaciones. La solución del sistema es la intersección de las regiones del plano determinadas por cada inecuación que lo conforman.*

**a)** $\begin{cases} y \leq 3 \\ x > -2 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} y > -x \\ y \leq x \\ x < 5 \end{cases}$




**c)** $\begin{cases} x + y < 1 \\ 3x - 2y \leq 2 \\ -x - 2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < 1 - x \\ -2y \leq 2 - 3x \\ x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < 1 - x \\ y \geq \frac{3}{2}x - 1 \\ x \geq -2 \end{cases}$

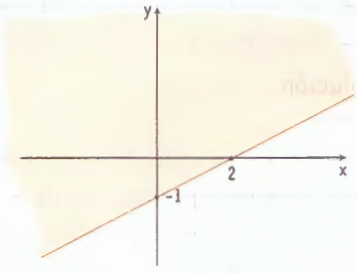
# Sistemas de inecuaciones lineales

PARADA PRÁCTICA 38

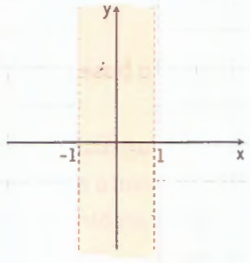
## VERIFICACIÓN 38

- **Escriban la inecuación que corresponda a cada uno de los siguientes gráficos.**

1)




2)




3)

## APLICACIÓN 38

### Ejercicio 38.1

- **Grafiquen cada uno de los siguientes sistemas y marquen el conjunto solución.**

1) $\begin{cases} y \geq 1 \\ |x| \geq 3 \\ y \leq 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} |y| < 2 \\ -4 < x \leq 1 \\ y \leq x \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - y < 3 \\ -2 \leq y < 5 \\ x + y > 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x > -2 \\ \frac{3}{4}x + 3 \leq y \\ y + x - 3 < 0 \end{cases}$

PARADA TEÓRICA 39

# Programación lineal

*La **programación lineal** es un conjunto de técnicas que permiten la resolución de problemas de planificación que posibilitan maximizar ganancias o minimizar costos, teniendo en cuenta los límites o restricciones que presenta el problema.*

Los sistemas de inecuaciones lineales constituyen la base para su resolución.

Una empresa produce a lo sumo 60 unidades de un artículo A y 120 unidades de un artículo B por semana. La ganancia por cada artículo A es de $ 130 y por cada artículo B, $ 20, siendo la producción de A no inferior a 10 unidades por semana. La producción combinada de A y B no puede superar las 160 unidades. ¿Cuántas unidades de cada artículo se deben fabricar para maximizar las ganancias?

Se designa con "**x**" al número de unidades que se fabrican del artículo A y con "**y**" al número de unidades que se fabrican del artículo B; por lo tanto **130x + 20y** será la ganancia sujeta a las siguientes restricciones:

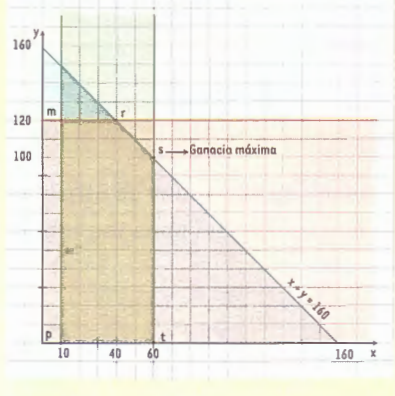
a) se producen no menos de 10 unidades por semana del artículo A y 60 como máximo: $\mathbf{10 \leq x \leq 60}$;

b) se producen como máximo 120 unidades semanales del artículo B: $\mathbf{0 \leq y \leq 120}$;

c) la producción combinada de A y B es a lo sumo de 160 unidades: $\mathbf{x + y \leq 160}$.

Se plantea y resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 10 \leq x \leq 60 \\ 0 \leq y \leq 120 \\ x + y \leq 160 \end{cases}$$




La solución del sistema es el polígono **mrstp** y vértice del que se obtenga la máxima ganancia será la solución al problema.

| Vértice | Ganancia: 130x + 20y |
|---|---|
| m = (10;120) | 130.10 + 20.120 = 3.700 |
| r = (40;120) | 130.40 + 20.120 = 7.600 |
| s = (60;100) | 130.60 + 20.100 = 9.800 |
| t = (60;0) | 130.60 + 20.0 = 7.800 |
| p = (10;0) | 130.10 + 20.0 = 1.300 |

**Se logra una ganancia máxima de $ 9.800 con la producción de 60 unidades del artículo A y 100 unidades del artículo B.**

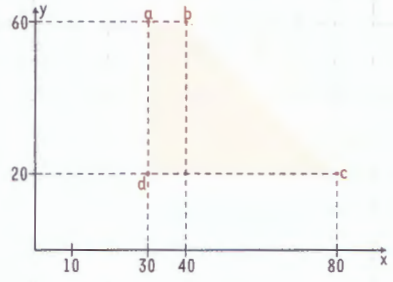
# Programación lineal

PARADA PRÁCTICA 39

## VERIFICACIÓN 39

- **Calculen y respondan.**

Si "x" es la cantidad de remeras; "y" la de pantalones fabricados por una empresa textil y el costo de la producción está dado por: $C = 2x + 5y$, ¿cuántas unidades de remeras y pantalones se deben fabricar para que el costo sea mínimo?




## APLICACIÓN 39

### Ejercicio 39.1

En una evaluación de Matemática se califican dos aspectos: el desarrollo de las consignas y el tiempo de resolución.

Las consignas teóricas tienen un valor de 10 puntos y las prácticas, de 12. El tiempo máximo para resolver una consigna teórica es de 4 minutos y de 6 minutos para las prácticas.

La evaluación dura 60 minutos y la cantidad mínima de respuestas debe ser 12.

- **Grafiquen el sistema de inecuaciones correspondiente, calculen y respondan.**

**1)**

**2)** ¿Cuántos ejercicios teóricos y prácticos se deben resolver para que la calificación sea máxima?

**3)** ¿Cuál es el valor de la calificación máxima?

# TRAMO E: ejercitación final

INTEGRACIÓN E

## Ejercicio E.1

- **Representen cada una de las siguientes funciones afines.**

**1)** $y = \frac{1}{3}x - 1$ **2)** $y = -2x + \frac{1}{2}$ **3)** $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$

## Ejercicio E.2

- **Hallen la ecuación de la recta R, que pasa por los puntos (2;-2) y (-1;4).**

**1)**

- **Marquen con una X los puntos que pertenecen a la recta R.**

**2) a)** (0;-2) ☐ **b)** (1;0) ☐ **c)** (-1;-1) ☐ **d)** (3;-4) ☐ **e)** $\left(\frac{3}{2};-1\right)$ ☐

- **Hallen la ecuación de la recta P, perpendicular a R, que pasa por el punto (-1;3).**

**3)**

- **Encuentren analítica y gráficamente P ∩ R.**

**4)**

## Ejercicio E.3

**• Clasifiquen según sus lados a cada uno de los siguientes triángulos.**

**1)** $\triangle abc$ $\begin{cases} a = (1;1) \\ b = (3;1) \\ c = (2;5) \end{cases}$

**2)** $\triangle mpn$ $\begin{cases} m = (-1;2) \\ p = (2;3) \\ n = (0;2) \end{cases}$

## Ejercicio E.4

**• Hallen la distancia del punto $m = (1;2)$ a la recta T: $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$.**

## Ejercicio E.5

**• Representen gráficamente cada una de las siguientes funciones.**

**1)** $y = 2|x - 3| - 1$

**2)** $y = -3|x + 2| + 5$

# TRAMO E: ejercitación final

## Ejercicio E.6

- **Resuelvan analítica y gráficamente cada uno de los siguientes sistemas.**

**1)** $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 1 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$

**2)** $\begin{cases} \frac{x-1}{2} + 3 = y - 1 \\ 2(x+3) - \frac{y+9}{3} = 0 \end{cases}$

**3)** $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3(y+2) = \frac{3x-2y}{2} \\ \frac{x-y}{3} + 1 = 3(x-1) + y \end{cases}$

## Ejercicio E.7

● **Planteen y resuelvan cada uno de los siguientes problemas.**

**1)** En un paralelogramo, la suma entre la mitad de uno de sus ángulos y la tercera parte de otro, no opuesto con el primero, es igual a 79°. ¿Cuál es la amplitud de los ángulos interiores del paralelogramo?

**2)** La razón entre las edades de dos personas es igual a $\frac{7}{10}$. Si dentro de 3 años, la tercera parte de la edad de la mayor de ellas será igual a la mitad de la edad actual de la menor, ¿cuál es la edad de cada una de las personas?

## Ejercicio E.8

● **Resuelvan gráficamente cada uno de los siguientes sistemas.**

**1)** $\begin{cases} |x| \leq 3 \\ |y| > 1 \\ -x - 2y \leq 0 \end{cases}$

**2)** $\begin{cases} -5 < x \leq 4 \\ y > \frac{1}{2}x - 2 \\ x - y > 1 \\ x + y \leq 4 \end{cases}$

# TRAMO E: ejercitación final

## Ejercicio E.9

● **Planteen, grafiquen y resuelvan cada uno de los siguientes problemas de programación lineal.**

**1)** Una empresa quiere hacer publicidad de sus productos en televisión. El minuto de publicidad televisiva tiene un costo de $ 300 en horario normal y de $ 450 en hora pico. Dentro del horario normal se quiere publicitar no menos de 10 minutos ni más de 30 y en hora pico no más de 20 minutos. Para que la campaña publicitaria sea exitosa debe tener un mínimo de 40 minutos en total.

¿Cuántos minutos en cada banda horaria se debe publicitar para que el costo sea mínimo y cuál es ese costo?

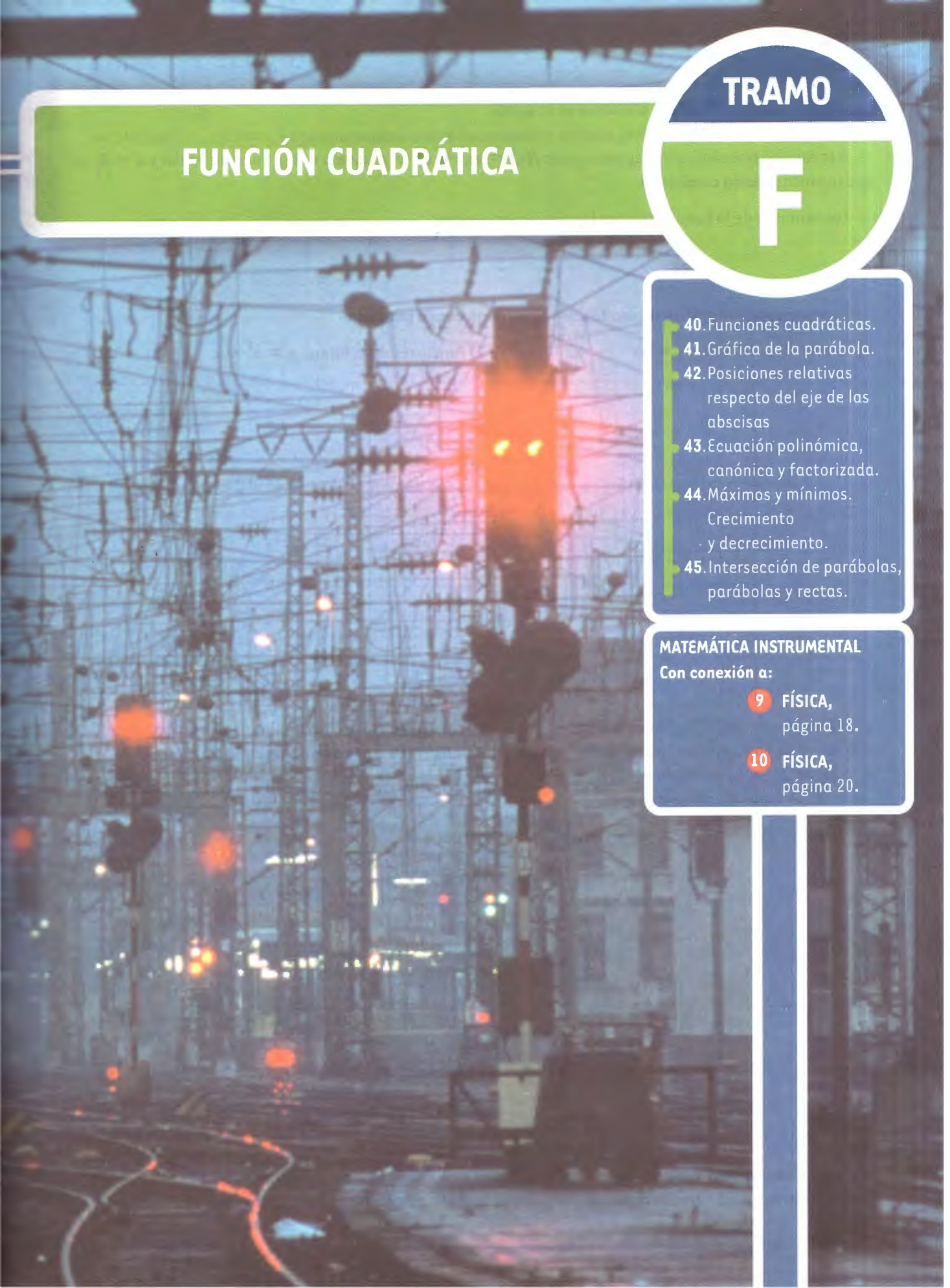
**2)** Un laboratorio debe comprar dos compuestos químicos necesarios para la fabricación de uno de sus productos. El compuesto A genera una ganancia de $ 15 por cada kg utilizado en la fabricación y el B una ganancia de $ 8 por kg. Son necesarios: un mínimo de 10 kg y un máximo de 25 kg del compuesto A; un mínimo de 20 kg y un máximo de 25 del compuesto B y un máximo de 45 kg de ambos por producto.

¿Qué cantidad de cada producto es necesaria para que la ganancia sea máxima y cuál es esa ganancia?

# FUNCIÓN CUADRÁTICA

TRAMO

F




- **40.** Funciones cuadráticas.
- **41.** Gráfica de la parábola.
- **42.** Posiciones relativas respecto del eje de las abscisas
- **43.** Ecuación polinómica, canónica y factorizada.
- **44.** Máximos y mínimos. Crecimiento y decrecimiento.
- **45.** Intersección de parábolas, parábolas y rectas.


**MATEMÁTICA INSTRUMENTAL**

**Con conexión a:**


9 **FÍSICA,** página 18.

10 **FÍSICA,** página 20.

PARADA TEÓRICA

# 40 Funciones cuadráticas

*A la función polinómica de segundo grado* $f(x) = ax^2 + bx + c$, *siendo* **a**, **b**, **c** *números reales y* $a \neq 0$, *se la denomina* ***función cuadrática***.

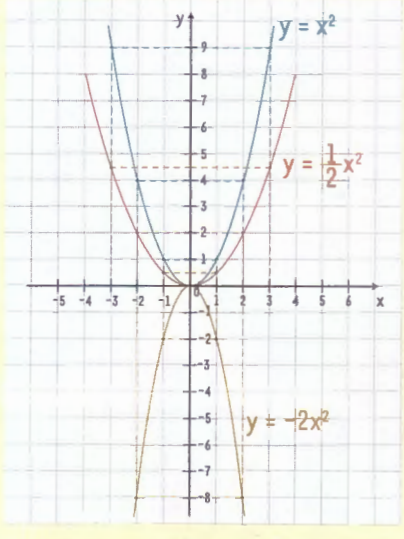
Los términos de la función reciben los siguientes nombres:

$y = ax^2 + bx + c$

- $ax^2$: Término cuadrático
- $bx$: Término lineal
- $c$: Término independiente

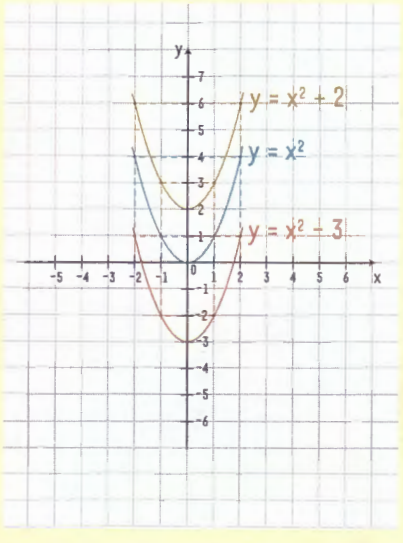
La **representación gráfica** de una función cuadrática es una **parábola**.

**1)** Funciones de la forma: $y = ax^2$



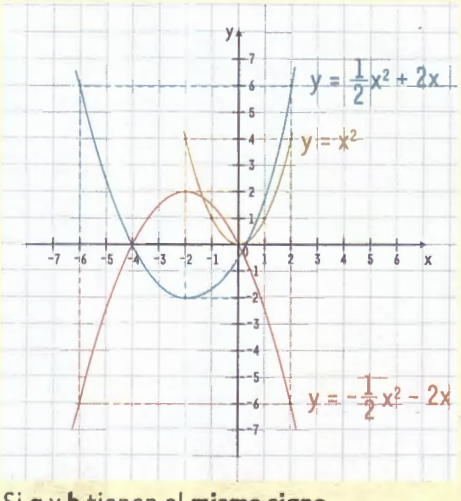

$a > 0$ → La parábola "va" hacia **arriba**.
$a < 0$ → La parábola "va" hacia **abajo**.
$0 < |a| < 1$ → La parábola se **abre**.
$|a| > 1$ → La parábola se **cierra**.

**2)** Funciones de la forma: $y = x^2 + c$

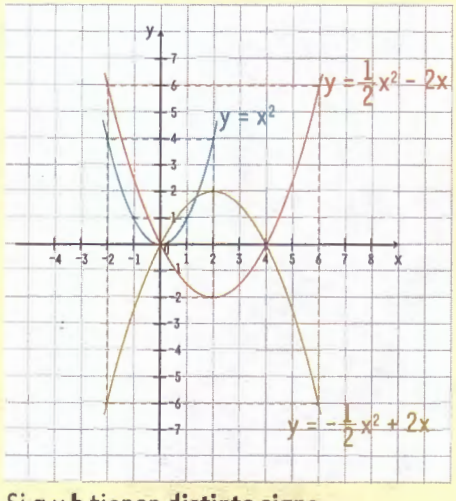



$c > 0$ → La gráfica se desplaza hacia **arriba**.
$c < 0$ → La gráfica se desplaza hacia **abajo**.

**3)** Funciones de la forma $y = ax^2 + bx$




Si **a** y **b** tienen el **mismo signo**,
la gráfica se desplaza hacia la **izquierda**.




Si **a** y **b** tienen **distinto signo**,
la gráfica se desplaza hacia la **derecha**.

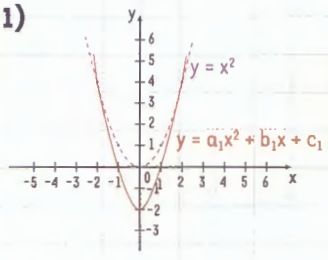
# Funciones cuadráticas

PARADA PRÁCTICA 40

## VERIFICACIÓN 40

● **Coloquen $>$, $<$ o $=$, según corresponda de la comparación de cada gráfico rojo con $y = x^2$.**

**1)**



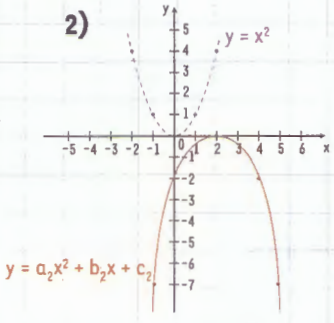

$a_1$ ___ 0

$|a_1|$ ___ 1

$c_1$ ___ 0

$b_1$ ___ 0

**2)**




$a_2$ ___ 0

$|a_2|$ ___ 1

$c_2$ ___ 0

$b_2$ ___ 0

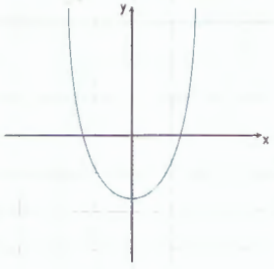
## APLICACIÓN 40

### Ejercicio 40.1

● **Marquen con una X la fórmula de la función que corresponde a cada gráfico.**

**1)**

| | |
|---|---|
| | $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ |
| | $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3$ |
| | $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ |
| | $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$ |



**2)**

| | |
|---|---|
| | $y = 2x^2 + \frac{1}{2}x$ |
| | $y = 2x^2 - \frac{1}{2}x$ |
| | $y = -2x^2 + \frac{1}{2}x$ |
| | $y = -2x^2 - \frac{1}{2}x$ |

### Ejercicio 40.2

● **Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda.**

**1)** La gráfica de $y = x^2 + n$ $(n > 0)$ es la gráfica de $y = x^2$ desplazada hacia arriba. ___

**2)** La gráfica de $y = x^2 - rx$ $(r > 0)$ es la gráfica de $y = x^2$ desplazada hacia la izquierda. ___

**3)** La gráfica de $y = x^2 - m$ $(m < 0)$ es la gráfica de $y = x^2$ desplazada hacia abajo. ___

**4)** La gráfica de $y = x^2 - tx$ $(t < 0)$ es la gráfica de $y = x^2$ desplazada hacia la izquierda. ___

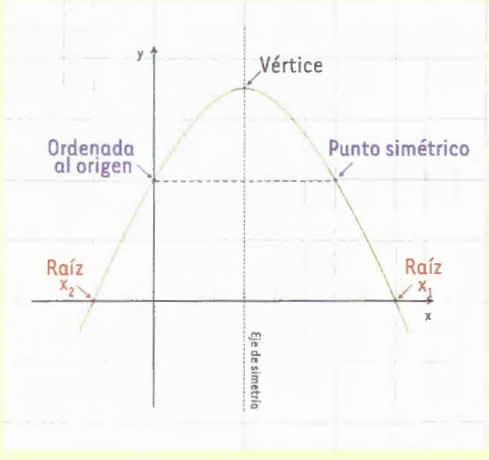
PARADA TEÓRICA 41

# Gráfica de la parábola

Para realizar el gráfico de una parábola, $f(x) = ax^2 + bx + c$, se deben calcular los elementos de la misma y luego representarla.

• *Raíces de la parábola.*
Son los puntos de intersección de la gráfica y el eje x, vale decir que $f(x) = 0$.

$$x_1;x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$




• *Vértice de la parábola.*

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad o \quad x_v = \frac{-b}{2a} \qquad y_v = f(x_v)$$

Las coordenadas del vértice son: $V = (x_v , f(x_v))$.

• *Eje de simetría.*
Es la recta que tiene por ecuación $x = x_v$.

• *Ordenada al origen.*
Es el punto de intersección de la gráfica con el eje y, vale decir que $f(0) = c$.

$f(x) = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow \quad a = 1 \wedge b = 2 \wedge c = -3$

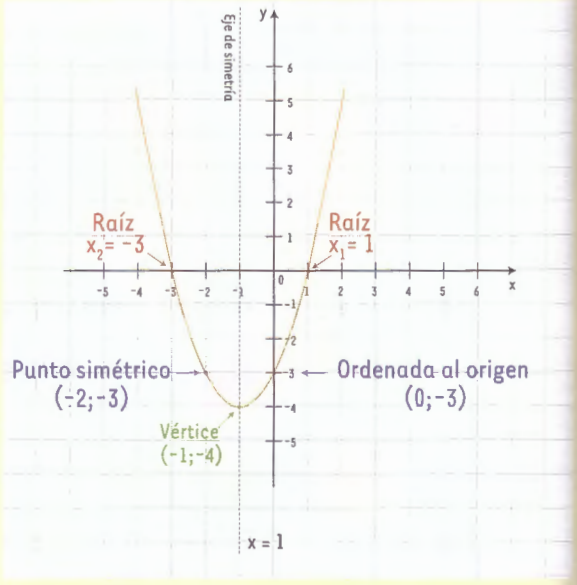
**Raíces:**

$$x_1;x_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4.1(-3)}}{2.1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$x_1;x_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 4}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-2 - 4}{2} = -3$$




**Vértice:**

$$x_v = \frac{-2}{2.1} \Rightarrow \quad x_v = -1$$

$$y_v = (-1)^2 + 2(-1) - 3 \Rightarrow \quad y_v = -4$$

$V = (-1;-4)$

**Eje de simetría:** $x = -1$ **Ordenada al origen:** $(0;-3)$ **Punto simétrico:** $(-2;-3)$

# Gráfica de la parábola

PARADA PRÁCTICA 41

**VERIFICACIÓN 41**

- **Completen las siguientes oraciones correspondientes a la gráfica de $y = -3x^2 + x + 2$.**

**1)** Los coeficientes de los términos de la función son: a = , b = y c =

**2)** El vértice de la parábola es el punto

**3)** El eje de simetría de la parábola es la recta

**4)** La ordenada al origen de la función es el punto

**5)** Las raíces de la función son $x_1$ = y $x_2$ =

**APLICACIÓN 41**

## Ejercicio 41.1

- **Completen el siguiente cuadro.**

| | Función | a | b | c | Raíces | Vértice | Eje de simetría | Ordenada al origen |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1)** | $y = -x^2 + 2$ | | | | | | | |
| **2)** | $y = 2x^2 + 4x - 1$ | | | | | | | |
| **3)** | $y = x^2 - 4x - 5$ | | | | | | | |

## Ejercicio 41.2

- **Realicen un gráfico aproximado de las siguientes funciones.**

Indiquen en cada caso: vértice, eje de simetría, raíces y ordenada al origen de cada una de las parábolas.

**1)** $y = x^2 - x - 2$

## Gráfica de la parábola

**2)** $y = 2x^2 + 4x - \frac{5}{2}$

**3)** $y = 3x^2 - 12x + 12$

**4)** $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 5$

**5)** $y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{11}{4}$

PARADA TEÓRICA 42

# Posiciones relativas respecto del eje de las abscisas

Las raíces de una parábola, $y = ax^2 + bx + c$, se calculan mediante la fórmula:

$$x_1; x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

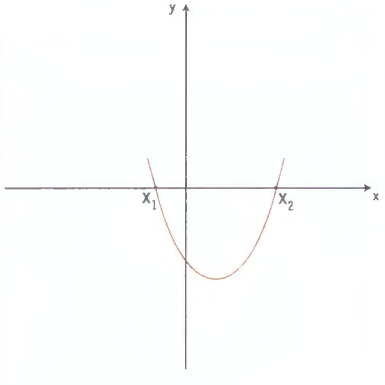
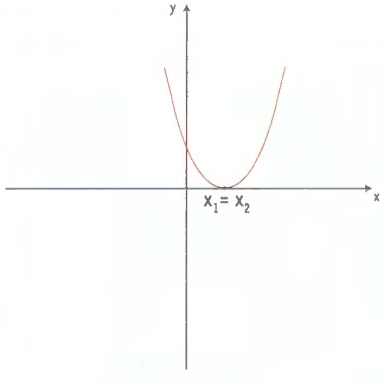
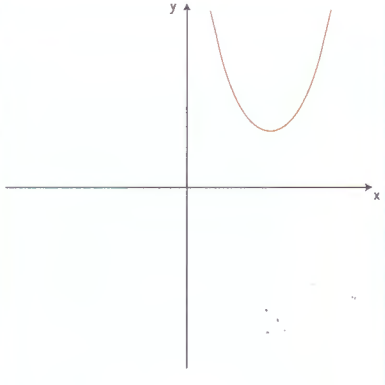
*Al radicando* $b^2 - 4ac$ *se lo llama* ***discriminante****, ya que el valor del mismo sirve para discriminar la naturaleza de las raíces y se lo simboliza con la letra griega* $\Delta$ *(delta).*

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

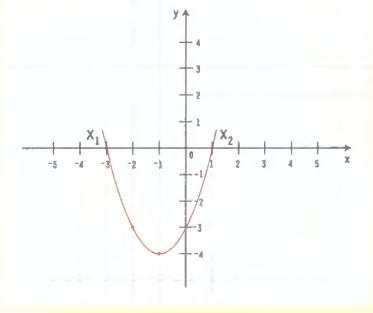
Si $\Delta > 0 \Rightarrow$ Raíces **reales distintas**.

Si $\Delta = 0 \Rightarrow$ Raíces **reales iguales**.

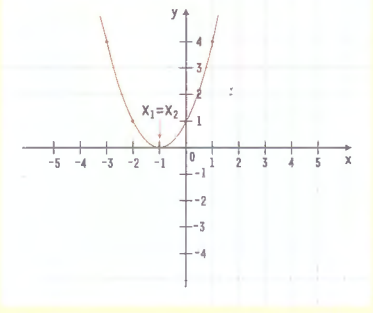
Si $\Delta < 0 \Rightarrow$ Raíces **no reales**.

| $\Delta > 0$ | $\Delta = 0$ | $\Delta < 0$ |
|---|---|---|
|   |   |   |
| La gráfica tiene **2 puntos** de intersección con el eje x. | La gráfica tiene **1 punto** de intersección con el eje x. | La gráfica **no tiene** puntos de intersección con el eje x. |

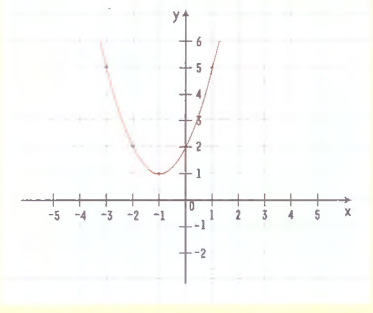
**a)** $y = x^2 + 2x - 3$
$\Delta = 2^2 - 4.1(-3) = 16$




**b)** $y = x^2 + 2x + 1$
$\Delta = 2^2 - 4.1.1 = 0$




**c)** $y = x^2 + 2x + 2$
$\Delta = 2^2 - 4.2.1 = -4$

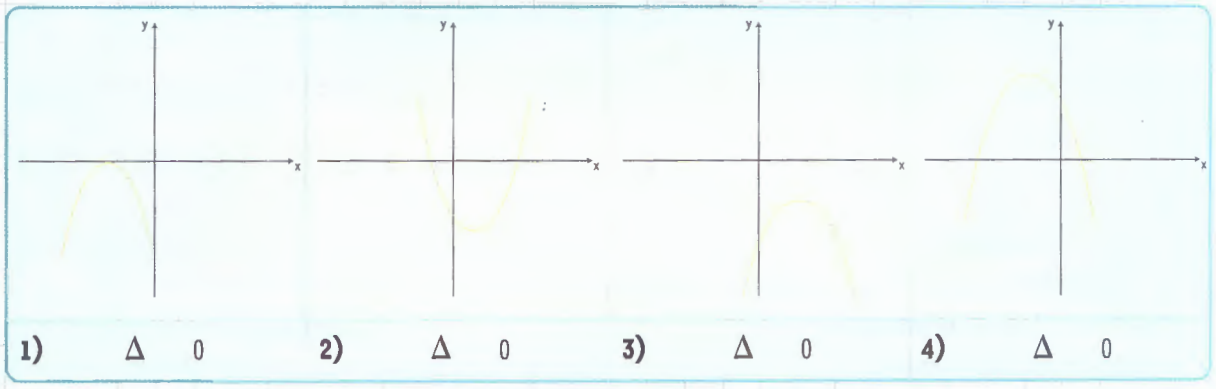


# Posiciones relativas respecto del eje de las abscisas

PARADA PRÁCTICA 42

## VERIFICACIÓN 42

- Completen con $>$, $<$ o $=$, según corresponda en cada caso.



1) $\Delta$ 0 2) $\Delta$ 0 3) $\Delta$ 0 4) $\Delta$ 0

## APLICACIÓN 42

### Ejercicio 42.1

- Calculen el valor del discriminante y marquen con una X el tipo de raíces de $f(x) = ax^2 + bx + c$.

| | a | b | c | $\Delta = b^2 - 4ac$ | Raíces reales iguales | Raíces reales distintas | No tiene raíces reales |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1) | 1 | -4 | -4 | | | | |
| 2) | -1 | -3 | -4 | | | | |
| 3) | -2 | $2\sqrt{2}$ | -1 | | | | |
| 4) | 1 | 0 | -3 | | | | |
| 5) | $\sqrt{3}$ | 6 | $3\sqrt{3}$ | | | | |

### Ejercicio 42.2

- Calculen el o los valores de k para los cuales las siguientes funciones tienen dos raíces reales iguales y escriban su fórmula.

1) $f(x) = x^2 + 2kx + k$

2) $f(x) = x^2 + (k - 1)x - k$

PARADA TEÓRICA 43

# Ecuación polinómica, canónica y factorizada

La función cuadrática puede ser expresada de distintas maneras.

**POLINÓMICA**
$f(x) = ax^2 + bx + c$

Se desarrolla el cuadrado de un binomio

Se aplica la propiedad distributiva

Se buscan las raíces

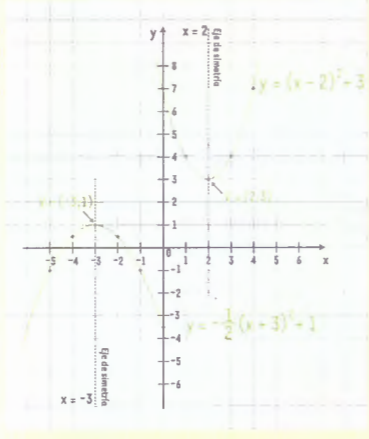
Se busca el vértice

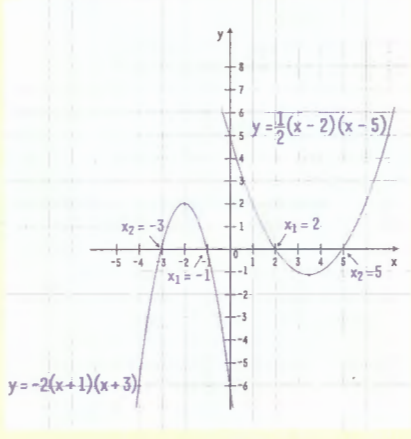
**CANÓNICA**
$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$

El **vértice** y el **eje de simetría** se reconocen con facilidad.

**FACTORIZADA**
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Las **raíces** se identifican en forma inmediata.




$y = \underbrace{(x-2)^2 + 3}_{\text{canónica}} = \underbrace{x^2 - 4x + 7}_{\text{polinómica}}$

$y = \underbrace{-\frac{1}{2}(x+3)^2 + 1}_{\text{canónica}} = \underbrace{-\frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{7}{2}}_{\text{polinómica}}$

$y = \underbrace{\frac{1}{2}(x-2)(x-5)}_{\text{factorizada}} = \underbrace{\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 5}_{\text{polinómica}}$

$y = \underbrace{-2(x+1)(x+3)}_{\text{factorizada}} = \underbrace{-2x^2 - 8x - 6}_{\text{polinómica}}$

Las raíces $x_1$ y $x_2$ de una ecuación de segundo grado ($ax^2 + bx + c = 0$) y los coeficientes a, b y c de su forma polinómica se relacionan de la siguiente manera:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a} \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Reconstruir la ecuación de segundo grado cuyas raíces son: $x_1 = -\frac{2}{3}$ y $x_2 = \frac{3}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{2}{3} + \frac{3}{2} = -\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{5}{6} = -\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = -\frac{5}{6} \\ -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{c}{a} \Rightarrow -\frac{6}{6} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - \frac{5}{6}x - 1 = 0$$

# Ecuación polinómica, canónica y factorizada

PARADA PRÁCTICA 43

**VERIFICACIÓN 43**

- **Expresen cada una de las siguientes funciones en la forma en que se pide.**

**1)** $f(x) = x^2 - 4x + 3$, en forma **canónica** es $f(x) =$

**2)** $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)(x - 3)$, en forma **polinómica** es $f(x) =$

**3)** $f(x) = 2(x - 3)^2 - 2$, en forma **polinómica** es $f(x) =$

**4)** $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, en forma **factorizada** es $f(x) =$

**APLICACIÓN 43**

## Ejercicio 43.1

- **Escriban las siguientes funciones en la forma más conveniente de acuerdo con los datos dados y luego hallen las expresiones polinómicas de cada una.**

**1)** El vértice es $(-3;-2)$ y el coeficiente principal es $-2$.

**2)** Las raíces son $x_1 = -4$ y $x_2 = 2$ y el coeficiente principal es $-1$.

**3)** El vértice es $(-3;-2)$ y pasa por el punto $(0;1)$.

**4)** Corta al eje x en $(-1;0)$ y $(4;0)$ y pasa por el punto $\left(-4;-\frac{5}{6}\right)$.

# Ecuación polinómica, canónica y factorizada

## Ejercicio 43.2

● **Realicen el gráfico aproximado de cada una de las siguientes funciones.**
Indiquen el vértice, eje de simetría y las raíces.

**1)** $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 2$

**2)** $y = 3\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

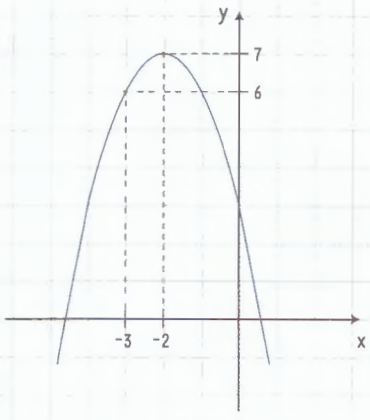
**3)** $y = 2(x + 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

**4)** $y = -\frac{1}{4}(x - 5)(x + 2)$

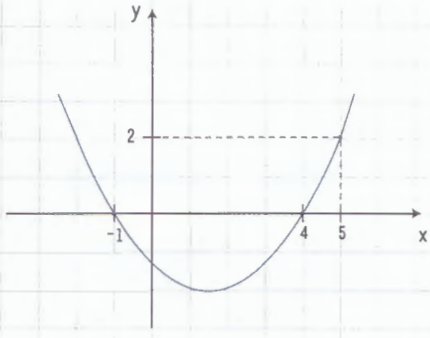
## Ejercicio 43.3

● **Escriban la forma polinómica de cada una de las siguientes funciones.**

**1)**




**2)**




## Ejercicio 43.4

● **Reconstruyan las siguientes ecuaciones de segundo grado.**

**1)** $x_1 = \frac{2}{5} \wedge x_2 = -\frac{1}{2}$

**2)** $x_1 = \frac{1}{3} \wedge x_2 = -\frac{7}{6}$

**3)** $x_1 = x_2 = \sqrt{2}$

PARADA TEÓRICA 44

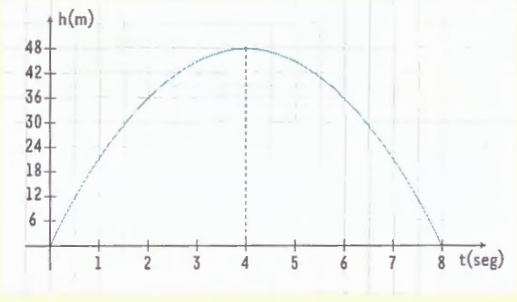
# Máximos y mínimos. Crecimiento y decrecimiento

Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de 24 $\frac{m}{seg}$.

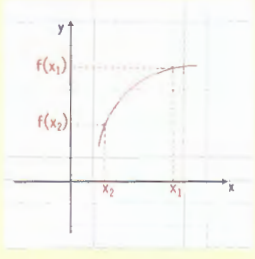
La altura alcanzada por la pelota (**h**, expresada en metros) en función del tiempo (**t**, expresado en segundos), está dada por la siguiente fórmula: $\mathbf{h(t) = -3t^2 + 24t}$.

Analizando el gráfico que describe la trayectoria de la pelota, se puede concluir que:

- El dominio más adecuado para la función, según la interpretación del problema, es el conjunto de los números reales positivos: $D_f = \mathbb{R}_0^+$.
- La altura máxima alcanzada por la pelota es **48 m**.
- Alcanza la altura máxima a los **4 seg** de haber sido lanzada.
- El intervalo de tiempo en el cual la pelota asciende (desde que es lanzada hasta el momento que alcanza la altura máxima) es **(0;4)**; *intervalo de crecimiento*.
- El intervalo de tiempo en el cual la pelota desciende (desde que alcanza la altura máxima hasta que vuelve a tocar el suelo) es **(4;8)**; *intervalo de decrecimiento*.

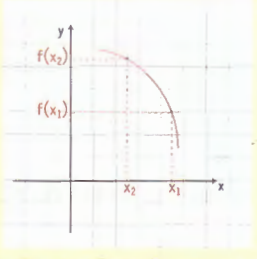



*Una función continua es* **creciente** *en un cierto intervalo de su dominio cuando al aumentar los valores de la variable independiente, aumentan los valores de la variable dependiente.*



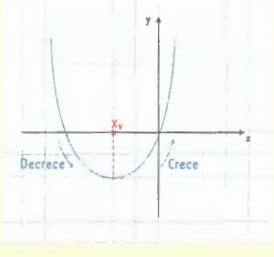

**f(x) es creciente si: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$**

*Una función continua es* **decreciente** *en un cierto intervalo de su dominio cuando al aumentar los valores de la variable independiente, disminuyen los valores de la variable dependiente.*



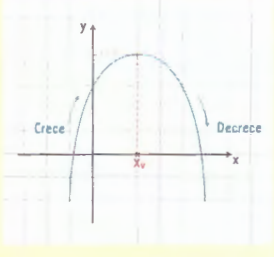

**f(x) es decreciente si: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$**

En general, dada la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, se verifica que:




Si $\mathbf{a > 0}$, la función:

- Alcanza un **mínimo** en el vértice de la parábola.
- **Decrece** en el intervalo $(-\infty; x_v)$.
- **Crece** en el intervalo $(x_v; +\infty)$.




Si $\mathbf{a < 0}$, la función:

- Alcanza un **máximo** en el vértice de la parábola.
- **Crece** en el intervalo $(-\infty; x_v)$.
- **Decrece** en el intervalo $(x_v; +\infty)$.

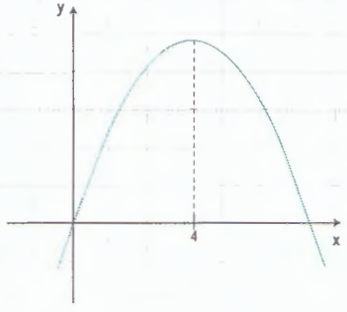
# Máximos y mínimos. Crecimiento y decrecimiento

PARADA PRÁCTICA 44

## VERIFICACIÓN 44

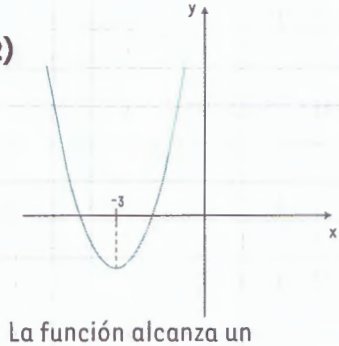
● **Completen las frases que figuran debajo de cada uno de los gráficos.**

**1)**




La función alcanza un _____ en x = 4;
crece en el intervalo _____ y decrece en
el intervalo _____.

**2)**




La función alcanza un _____ en x = -3;
crece en el intervalo _____ y decrece en
el intervalo _____.

## APLICACIÓN 44

### Ejercicio 44.1

Los ingresos mensuales de un fabricante de zapatos están dados por la función $I(z) = 1.000z - 2z^2$, donde z es la cantidad de pares de zapatos que fabrica en el mes.

● **Realicen el gráfico aproximado de la función y respondan.**

**1)** ¿Qué cantidad de pares debe fabricar mensualmente para obtener el mayor ingreso?

**2)** ¿Cuáles son los ingresos si se fabrican 125 pares de zapatos? ¿Y 375 pares?

**3)** ¿A partir de qué cantidad de pares comienza a tener pérdidas?

### Ejercicio 44.2

● **Planteen y resuelvan.**

Si la diferencia entre dos números es 6, ¿cuáles deben ser los números para obtener el menor producto? ¿Cuál es ese producto?

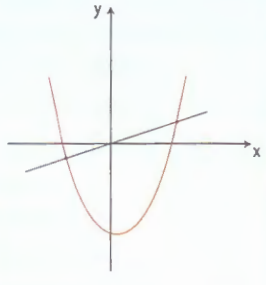
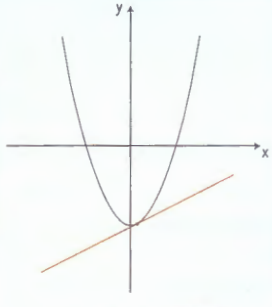
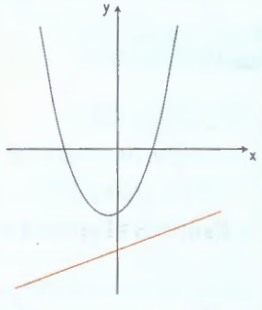
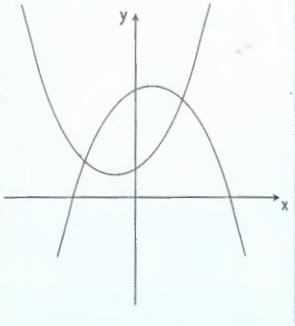
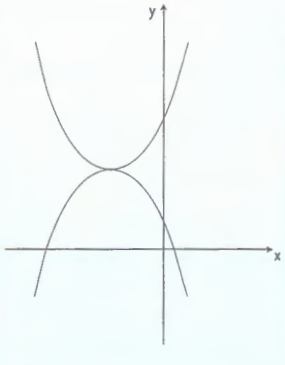
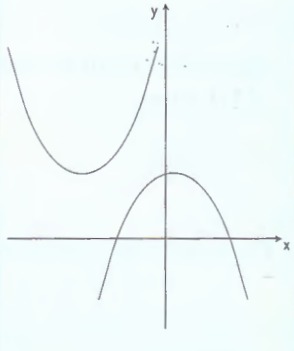
PARADA TEÓRICA 45

# Intersección de parábolas, parábolas y rectas

*Resolver **analíticamente** un sistema de ecuaciones significa encontrar los valores de las incógnitas que verifican simultáneamente las ecuaciones del sistema.*

*Resolver **gráficamente** un sistema de ecuaciones significa encontrar los puntos de intersección de ambas gráficas.*

En los casos en que el sistema esté formado al menos por una ecuación de segundo grado, se puede reconocer cuántas soluciones tiene el mismo analizando el discriminante de la ecuación cuadrática que surge al resolver el sistema por el método de igualación o sustitución.

| | $\Delta > 0$ **Dos** puntos de intersección | $\Delta = 0$ **Un** punto de intersección | $\Delta < 0$ **Ningún** punto de intersección |
|---|---|---|---|
| Sistema formado por una recta y una parábola $\begin{cases} y = mx + d \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ |  La recta es **secante** a la parábola |  La recta es **tangente** a la parábola |  La recta es **exterior** a la parábola |
| Sistema formado por dos parábolas $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = dx^2 + ex + c \end{cases}$ |  |  |  |

**a)** $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x^2 - x + 5 \end{cases}$

$-x^2 - x + 5 = 2x + 1$

$-x^2 - 3x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -4 \wedge x_2 = 1$

La recta es secante a la parábola en los puntos $(-4;-7)$ y $(1;3)$.

**b)** $\begin{cases} y = 3x^2 + 2x + 1 \\ y = x^2 + x - 4 \end{cases}$

$3x^2 + 2x + 1 = x^2 + x - 4$

$2x^2 + x + 5 = 0 \Rightarrow$ No tiene raíces reales.

Las parábolas no se cortan.

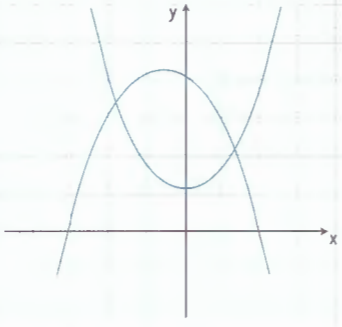
# Intersección de parábolas, parábolas y rectas

PARADA PRÁCTICA 45

## VERIFICACIÓN 45

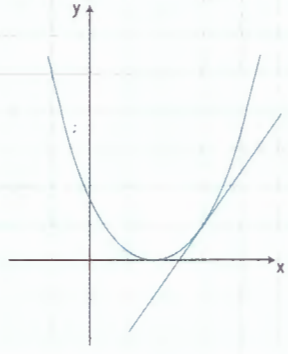
● **Completen con $>$, $<$ o $=$, según corresponda en cada gráfico.**

**1)**



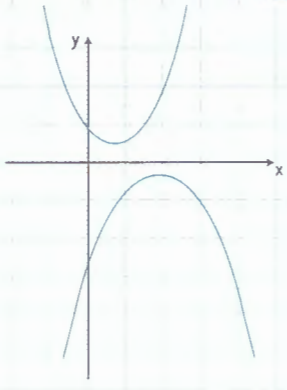

$\Delta$ 0

**2)**




$\Delta$ 0

**3)**




$\Delta$ 0

## APLICACIÓN 45

### Ejercicio 45.1

● **Indiquen la cantidad de soluciones de los siguientes sistemas analizando las fórmulas de las ecuaciones que los determinan.**

**1)** $\begin{cases} y = 2x^2 + 5 \\ y = 5 \end{cases}$

**2)** $\begin{cases} y = 2x^2 + 5 \\ y = 7 \end{cases}$

**3)** $\begin{cases} y = 2x^2 + 5 \\ y = -6 \end{cases}$

**4)** $\begin{cases} y = 2x^2 + 5 \\ y = -2x^2 + 5 \end{cases}$

**5)** $\begin{cases} y = 2x^2 + 5 \\ y = -3x^2 \end{cases}$

**6)** $\begin{cases} y = 2x^2 + 5 \\ y = -3x^2 + 8 \end{cases}$

### Ejercicio 45.2

● **Determinen el valor de k para que el siguiente sistema tenga:**

**1)** dos soluciones;
**2)** una solución;
**3)** ninguna solución.

$$\begin{cases} y = 3x^2 + 2x \\ y = -3x + k \end{cases}$$

# Intersección de parábolas, parábolas y rectas

## Ejercicio 45.3

- **Resuelvan analítica y gráficamente cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones.**

**1)** $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = -x^2 + 2x + 7 \end{cases}$

**2)** $\begin{cases} y - x^2 = 4 \\ 4x + y = 0 \end{cases}$

**3)** $\begin{cases} y = 4x - x^2 + 8 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$

**4)** $\begin{cases} y - 2 = x^2 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$

# TRAMO F: ejercitación final

INTEGRACIÓN F

## Ejercicio F.1

● **Marquen con una X la única opción correcta en cada caso.**

**1)** La función cuadrática $y = x^2 + 3$ está expresada:

| | |
|---|---|
| | En forma canónica |
| | En forma polinómica |
| | De ambas formas |
| | Ninguna de las dos formas |

**2)** La parábola $y = -3(x + 3)^2 - 4$ tiene como vértice al punto:

| | |
|---|---|
| | (3;-4) |
| | (3;4) |
| | (-3;-4) |
| | (-3;4) |

**3)** Las raíces de la ecuación $-\frac{1}{2}x^2 + 8 = 0$ son:

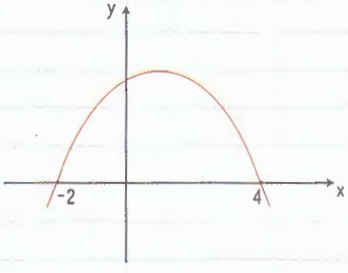
| | |
|---|---|
| | $x_1 = 8 \wedge x_2 = 4$ |
| | $x_1 = -4 \wedge x_2 = 4$ |
| | $x_1 = -4 \wedge x_2 = 8$ |
| | $x_1 = 4 \wedge x_2 = 0$ |

**4)** El valor de **b** para que la parábola $y = 3x^2 + bx + 1$ tenga como eje de simetría a la recta $x = \frac{5}{2}$ es:

| | |
|---|---|
| | $\frac{5}{2}$ |
| | -15 |
| | 5 |
| | $-\frac{5}{6}$ |

**5)** La fórmula que corresponde al gráfico es:

| | |
|---|---|
| | $2(x + 2)(x + 4)$ |
| | $-2(x - 2)(x + 4)$ |
| | $2(x + 2)(x - 4)$ |
| | $-2(x + 2)(x - 4)$ |




## Ejercicio F.2

● **Unan con una flecha cada función con su correspondiente gráfico.**

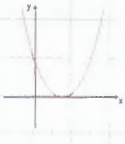
**1)** $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$

**2)** $f_2(x) = -x^2 + x - 1$

**3)** $f_3(x) = x^2 - 2x + 1$

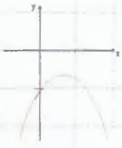
**4)** $f_4(x) = -2x^2 + 8x - 6$

**a)**



**b)**

**c)**



**d)**

## Ejercicio F.3

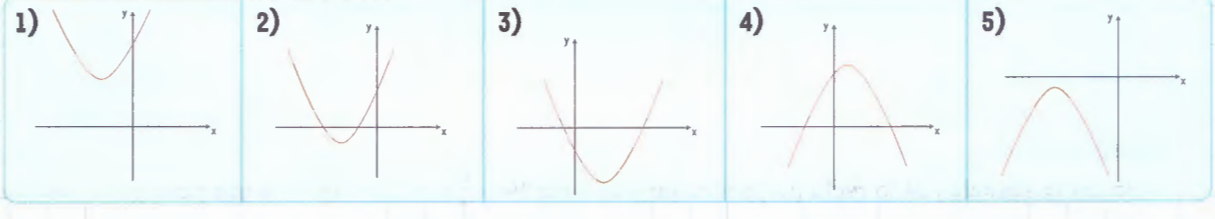
Sea la función $y = -2x^2 - 4x + 6$.

- **Realicen el gráfico correspondiente y hallen la expresión canónica y factorizada de la misma.**

Indiquen: coordenadas del vértice, eje de simetría, intersecciones con el eje x, intersección con el eje y.

## Ejercicio F.4

Dados los siguientes gráficos:




dados los siguientes grupos de características:

| I | II | III | IV | V | VI | VII |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a > 0$ | $a > 0$ | $a < 0$ | $a > 0$ | $a < 0$ | $a > 0$ | $a < 0$ |
| $b < 0$ | $b > 0$ | $b < 0$ | $b < 0$ | $b > 0$ | $b > 0$ | $b < 0$ |
| $c > 0$ | $c > 0$ | $c > 0$ | $c < 0$ | $c > 0$ | $c > 0$ | $c < 0$ |
| $\Delta > 0$ | $\Delta < 0$ | $\Delta > 0$ | $\Delta > 0$ | $\Delta > 0$ | $\Delta > 0$ | $\Delta < 0$ |

- **Completen la tabla con el grupo de características de cada gráfico.**

| Gráfico | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Grupo de características | | | | | |

# TRAMO F: ejercitación final

## Ejercicio F.5

- **Hallen, en forma canónica, la función cuadrática que corta el eje x en 10 y tiene un máximo en (7;8).**

## Ejercicio F.6

Sea la ecuación $x^2 + 3x + k = 0$:

- **Hallen el valor de k para el cual la ecuación no tiene raíces reales.**

## Ejercicio F.7

- **Hallen las rectas paralelas a la recta R: $x + y - 2 = 0$, que pasan por las raíces de $y = -2x^2 + 3x + 2$.**

## Ejercicio F.8

- **Hallen la ecuación de la recta perpendicular a la recta M: $-\frac{1}{2}x - 2 - 6y = 0$ que pasa por el vértice de $y = -x^2 + 2x$.**

## Ejercicio F.9

Sea $f(x) = -3(x - 1)(x - k)$, la ecuación de una parábola cuyo vértice tiene abscisa igual a -5:

- **Calculen $f\left(-\frac{1}{3}\right)$.**

## Ejercicio F.10

● **Calculen y respondan.**

**1)** ¿Cuál debe ser el valor de **c**, para que la ecuación $\frac{1}{5}x^2 + 2x + c = 0$, tenga una raíz doble?

**2)** ¿Cuál es el valor de esa raíz?

## Ejercicio F.11

En una isla se introdujeron 112 iguanas. Al principio se reprodujeron rápidamente, pero los recursos de la isla comenzaron a escasear y la población decreció.
El número de iguanas a los **t** años de haberlas dejado en la isla está dado por:
$i(t) = -t^2 + 22t + 112 \ (t > 0)$.

● **Calculen.**

**1)** La cantidad de años en los cuales la población de iguanas aumentó.

● **Respondan.**

**2)** ¿En qué momento la población de iguanas se extingue?

## Ejercicio F.12

● **Calculen las dimensiones de un rectángulo, cuyo perímetro es de 50 cm, para que su área sea máxima.**

## Ejercicio F.13

● **Planteen y respondan.**

Si la suma de dos números es 40, ¿cuáles deben ser los mismos para obtener el mayor producto?

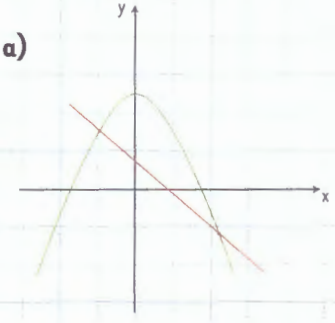
# TRAMO F: ejercitación final

## Ejercicio F.14

● **Marquen con una X la gráfica que corresponde a la representación del sistema.**

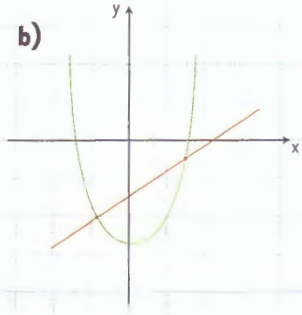
$$\begin{cases} y = mx + h \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases} \quad \wedge \quad m < 0 \wedge h > 0 \quad \wedge \quad a > 0 \wedge c < 0$$

**a)**



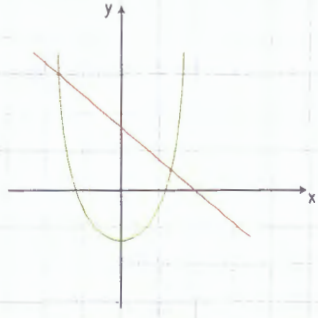

( )

**b)**




( )

**c)**




( )

## Ejercicio F.15

Una librería mayorista ha comprobado que la ganancia (en miles de pesos) por "x cientos" de cajas de lápices está dada por la función $\mathbf{I(x) = -x^2 + 7x - 8}$, y la ganancia (también en miles de pesos) por "x cientos" de cajas de cuadernos viene dada por $\mathbf{C(x) = 2x - 4}$.

● **Calculen.**

**1)** El número de cajas de ambos útiles para el cual se obtiene la misma ganancia.

● **Respondan.**

**2)** ¿Cuándo comienza a dar pérdida la venta de lápices? ¿ Y la de los cuadernos?

● **Realicen un gráfico aproximado de la situación.**

**3)**

# FUNCIONES POLINÓMICAS Y RACIONALES

TRAMO

G


**46.** Raíces e intersección con el eje de las abscisas.
**47.** Teorema de Bolzano.
**48.** Gráfico aproximado de una función polinómica.
**49.** Funciones racionales.


**MATEMÁTICA INSTRUMENTAL**
**Con conexión a:**


11 **ECONOMÍA,** página 22.

PARADA TEÓRICA

46

# Raíces e intersección con el eje de las abscisas

*Una función de la forma* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, *siendo* $n$ *un número natural y* $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$, *números reales, es una* ***función polinómica***.

- Si $a_n \neq 0$, entonces la función es de **grado n**.
- El **dominio** de las funciones polinómicas es el conjunto de los **números reales.**
- Las funciones polinómicas son **continuas**.

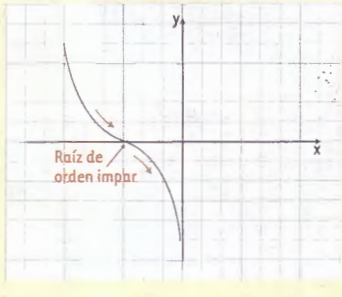
| Función | Grado |
|---|---|
| $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 4x - 3$ | Cuatro |
| $f(x) = x^3 - 4$ | Tres |
| $f(x) = 3x + 6$ | Uno |
| $f(x) = 85$ | Cero |

*Se llama* ***orden de multiplicidad*** *de una raíz a la cantidad de veces que esa raíz se repite como tal.*

Para determinar el comportamiento de una función polinómica respecto del eje x (eje de las abscisas), hay que factorizar el polinomio, $f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n)$, y determinar el orden de multiplicidad de sus raíces.

**1)** Si el **orden de multiplicidad** de la raíz es **par**, la gráfica de la función toca el eje x pero no lo atraviesa.

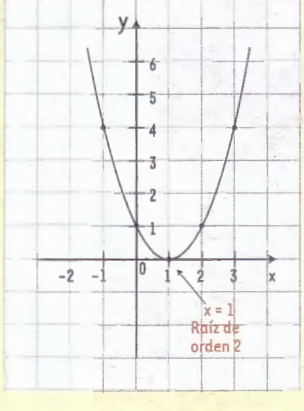
**2)** Si el **orden de multiplicidad** de la raíz es **impar**, la gráfica de la función atraviesa el eje x.




**a)** $f(x) = (x - 1)^2$

$x = 1$; es una **raíz de orden par**.

La gráfica toca el eje x y "**rebota**".




**b)** $f(x) = (x - 3)^3$

$x = 3$; es una **raíz de orden impar**.

La gráfica atraviesa el eje de abscisas y lo "**corta**".

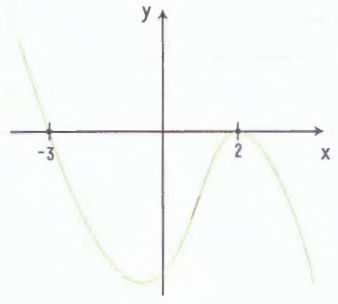
# Raíces e intersección con el eje de las abscisas

PARADA PRÁCTICA 46

## VERIFICACIÓN 46

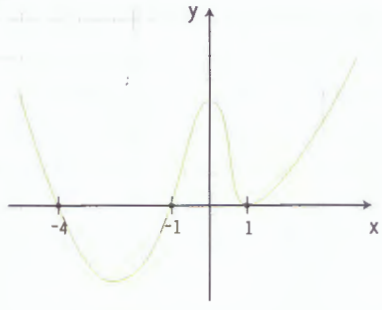
● **Indiquen, según el gráfico, si las raíces son de orden par o impar.**

**1)**



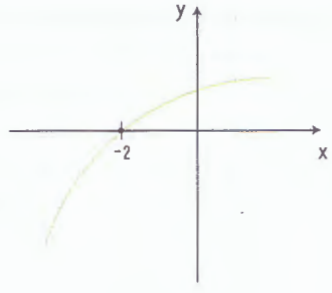

a) $x_1 = 2$:
b) $x_2 = -3$:

**2)**




a) $x_1 = 1$:
b) $x_2 = -1$:
c) $x_3 = -4$:

**3)**




a) $x_1 = -2$:

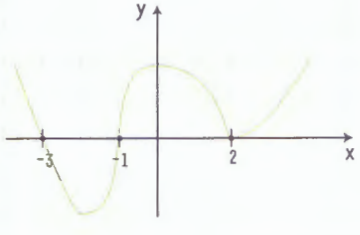
## APLICACIÓN 46

### Ejercicio 46.1

● **Marquen con una X el gráfico correspondiente a la función indicada en cada caso.**

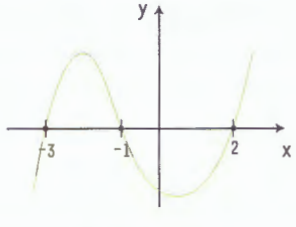
**1)** $f_1(x) = (x + 1)(x + 3)(x - 2)^2$

**a)**



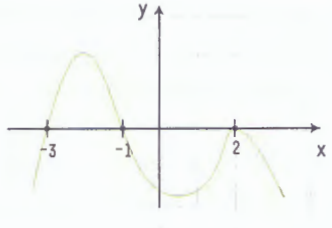

☐

**b)**




☐

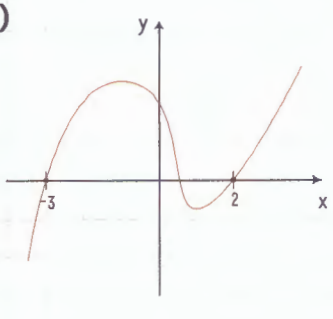
**c)**




☐

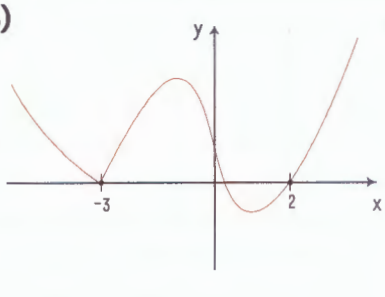
**2)** $f_2(x) = x(x - 2)(x + 3)^3$

**a)**



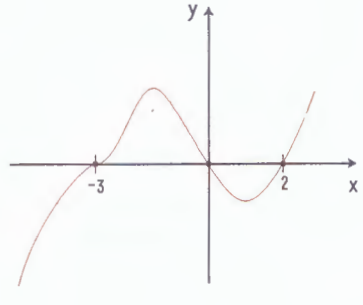

☐

**b)**




☐

**c)**




☐

# Raíces e intersección con el eje de las abscisas

## Ejercicio 46.2

**● Encuentren las raíces reales de las siguientes funciones polinómicas y determinen el orden de multiplicidad de las mismas.**

**1)** $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3$

**2)** $g(x) = x^3 - 6x^2 - x + 30$

**3)** $h(x) = 2x^3 - 4x - 8$

**4)** $j(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 2x^2$

## Ejercicio 46.3

**● Obtengan la fórmula de cada una de las siguientes funciones polinómicas.**

**1)** Función de grado 4.
$x_1 = 3$; es una raíz doble.
$x_2 = 2$; es una raíz doble.
$f(-1) = 2$

**2)** Función de grado 3.
$x_1 = -5$; es una raíz simple.
$x_2 = -1$; es una raíz doble.
$f(0) = 4$

**3)** Función de grado 3.

Puntos de intersección de la gráfica con el eje x:

$(-2;0)$, $(-1;0)$ y $\left(\frac{1}{2};0\right)$.

$f(-3) = -14$

**4)** Función de grado 4.

$a_n = \frac{2}{3} \wedge f(2) = 0$

$x_1 = -\frac{1}{3}$; es una raíz doble.

$x_2 = 3$; es una raíz simple.

## Ejercicio 46.4

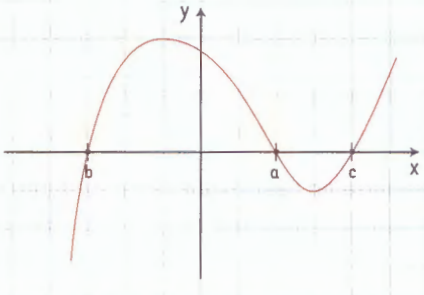
**● Unan con una flecha cada fórmula con el gráfico de la función polinómica correspondiente.**

**1)** $f_1(x) = (x - a)^2.(x - b)^4.(x - c)$

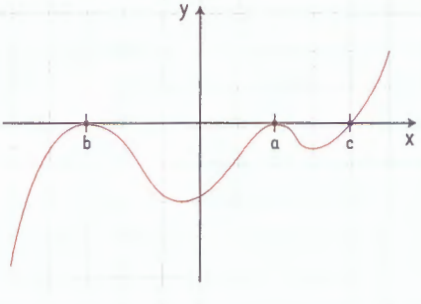
**2)** $f_2(x) = (x - c)^3.(x - b)(x - a)$

**3)** $f_3(x) = (x - a)(x - b)(x - c)^2$

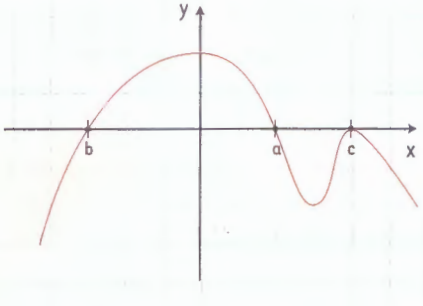
**a)**




**b)**




**c)**



PARADA TEÓRICA

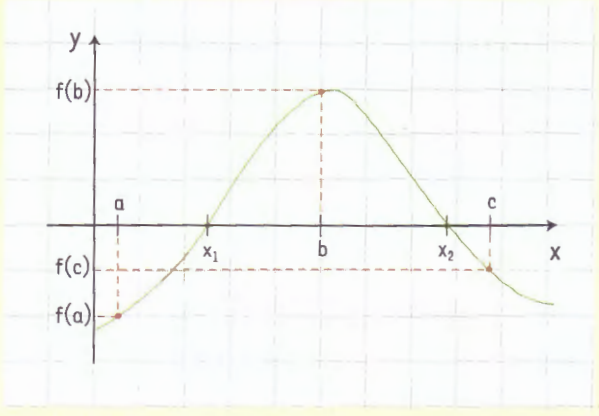
47

# Teorema de Bolzano

*Si una función f(x) es continua en un intervalo de su dominio, y tiene distinto signo en los extremos del mismo, entonces la función tiene por lo menos una raíz real en ese intervalo.*

$$\left.\begin{array}{l} f(a) < 0 \\ f(b) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1) = 0 \wedge x_1 \in (a;b)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(b) > 0 \\ f(c) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_2) = 0 \wedge x_2 \in (b;c)$$




Como consecuencia del teorema anterior, entre dos raíces reales consecutivas la función adopta solo valores positivos o negativos.

## Conjuntos de positividad y negatividad de una función polinómica

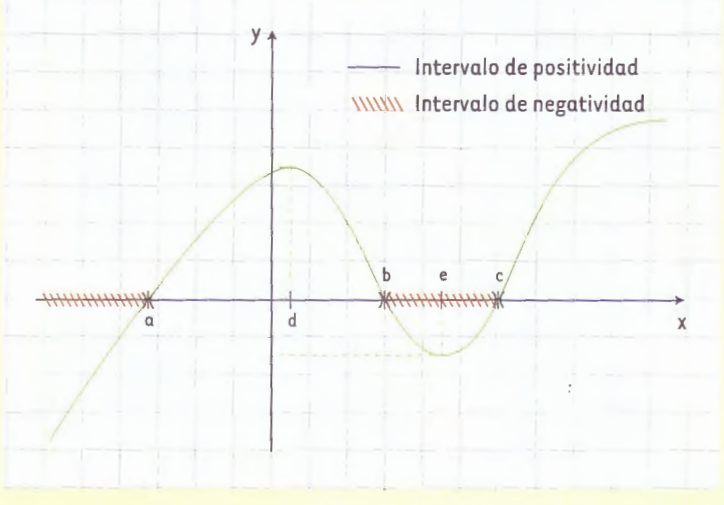
*El **conjunto de positividad** está formado por todos los valores del dominio para los cuales la función es positiva.*

$$C^+ = \{x / x \in D_f \wedge f(x) > 0\}$$

*El **conjunto de negatividad** está formado por todos los valores del dominio para los cuales la función es negativa.*

$$C^- = \{x / x \in D_f \wedge f(x) < 0\}$$

Los conjuntos de positividad y negatividad quedan determinados por las raíces reales de la función.




$$C^+ = (a;b) \cup (c;+\infty)$$

$$C^- = (-\infty;a) \cup (b;c)$$

La función es **creciente** en los intervalos $(-\infty;d)$ y $(e;+\infty)$, y **decreciente** en el intervalo $(d;e)$.

# Teorema de Bolzano

PARADA PRÁCTICA 47

## VERIFICACIÓN 47

● **Unan con una flecha cada raíz con el posible intervalo al que puede pertenecer.**

**1)** $f(1) = 0$

**2)** $f(3) = 0$

**3)** $f(-1) = 0$

**a)** $(2;5) \wedge f(2) = 4 \wedge f(5) = -3$

**b)** $(-3;0) \wedge f(-3) = -2 \wedge f(0) = 4$

**c)** $(-3;-4) \wedge f(-3) = 1 \wedge f(4) = 7$

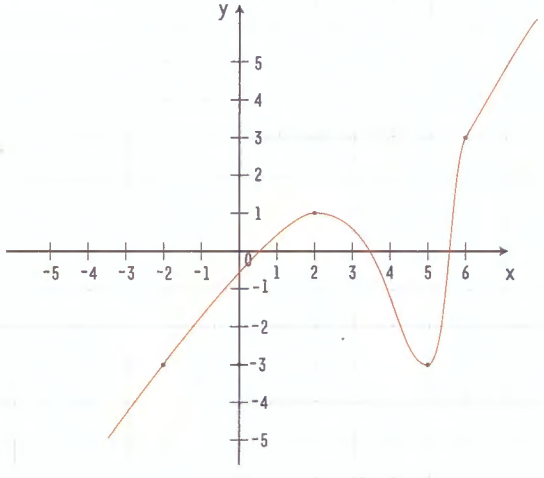
**d)** $(-1;3) \wedge f(-1) = 2 \wedge f(3) = -5$

## APLICACIÓN 47

### Ejercicio 47.1

La siguiente es la gráfica de una función polinómica de grado tres.

| x | f(x) |
|---|---|
| -2 | -3 |
| 2 | 1 |
| 5 | -3 |
| 6 | 3 |




● **Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda.**

**1)** $\forall x : x \in (2;+\infty) \Rightarrow f(x) > 0$ ☐

**2)** $\forall x : x \in (-\infty;-2) \Rightarrow f(x) < 0$ ☐

**3)** $\exists x / x \in [-2;0] \wedge f(x) = 0$ ☐

**4)** $\exists x / x \in [-2;2] \wedge f(x) = 0$ ☐

**5)** $C^- = (-\infty;0)$ ☐

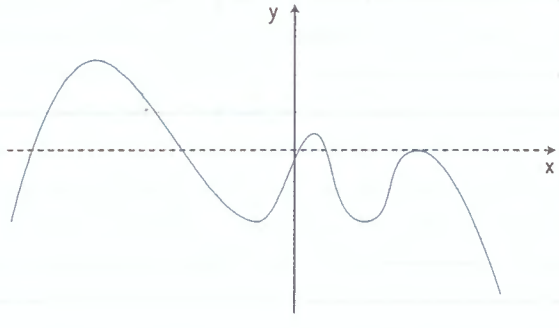
**6)** $C^+ = (6;+\infty)$ ☐

### Ejercicio 47.2

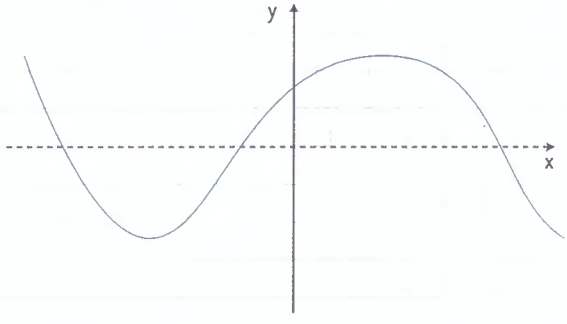
● **Marquen en cada uno de los siguientes gráficos:**

Con rojo, los intervalos de **positividad** y con verde, los intervalos de **negatividad.**

**1)**




**2)**



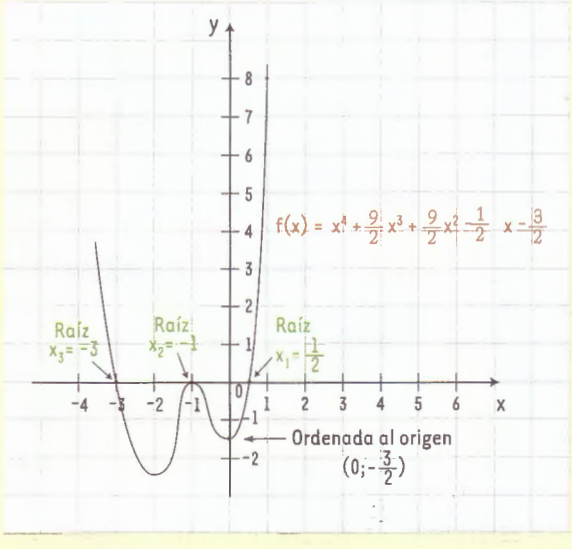
PARADA TEÓRICA 48

# Gráfico aproximado de una función polinómica

Para realizar el **gráfico aproximado** de una función polinómica se debe:

- *Hallar la **ordenada al origen**, la que está determinada por el término independiente y es el punto* $(0;a_0)$.
- *Factorizar el polinomio.*
  - **a)** Las **raíces** indican las intersecciones con el eje x.
  - **b)** El **orden de multiplicidad** de las raíces indica si la gráfica rebota o atraviesa el eje x.
- *Hallar los **conjuntos de positividad y negatividad**, para lo cual se buscan valores del dominio entre dos raíces consecutivas para determinar si la función es positiva o negativa en ese intervalo.*

$$f(x) = x^4 + \frac{9}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$




- ***Ordenada al origen***

$$\left(0;-\frac{3}{2}\right)$$

- ***Factorización del polinomio***

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1)^2.(x+3)$$

**a)** Intersecciones con el eje x:

$$x_1 = \frac{1}{2} \ \wedge \ x_2 = -1 \ \wedge \ x_3 = -3$$

**b)** Orden de multiplicidad:

$x_1 = \frac{1}{2}$; raíz simple $\Rightarrow$ La gráfica atraviesa el eje x.

$x_2 = -1$; raíz doble $\Rightarrow$ La gráfica rebota en el eje x.

$x_3 = -3$; raíz simple $\Rightarrow$ La gráfica atraviesa el eje x.

- ***Conjunto de positividad y negatividad***

**a)** $f(-4) = (-4)^4 + \frac{9}{2}(-4)^3 + \frac{9}{2}(-4)^2 - \frac{1}{2}(-4) - \frac{3}{2} = \frac{81}{2}$

$\forall x : x \in (-\infty;-3) \Rightarrow f(x) > 0$

**b)** $f(-2) = (-2)^4 + \frac{9}{2}(-2)^3 + \frac{9}{2}(-2)^2 - \frac{1}{2}(-2) - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$

$\forall x : x \in (-3;-1) \Rightarrow f(x) < 0$

**c)** $f(0) = -\frac{3}{2}$

$\forall x : x \in \left(-1;\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(x) < 0$

**d)** $f(1) = (1)^4 + \frac{9}{2}(1)^3 + \frac{9}{2}(1)^2 - \frac{1}{2}(1) - \frac{3}{2} = 8$

$\forall x : x \in \left(\frac{1}{2};+\infty\right) \Rightarrow f(x) > 0$

$$C^+ = (-\infty;-3) \cup \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$$

$$C^- = (-3;-1) \cup \left(-1;\frac{1}{2}\right)$$

# Gráfico aproximado de una función polinómica

PARADA PRÁCTICA 48

## VERIFICACIÓN 48

● **Completen las siguientes frases, correspondientes al análisis de $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.**

**1)** La intersección de la gráfica con el eje y es el punto .

**2)** La función factorizada tiene la forma .

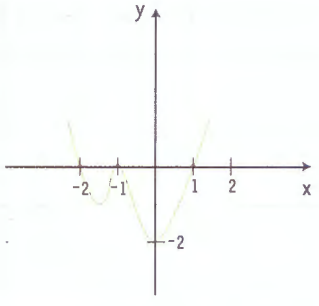
**3)** La raíz $x_1 =$ , es una raíz ; $x_2 =$ , es una raíz y $x_3 =$ , es una raíz .

**4)** $f(-3) =$ ; $f\left(-\frac{3}{2}\right) =$ ; $f(0) =$ y $f(2) =$ .

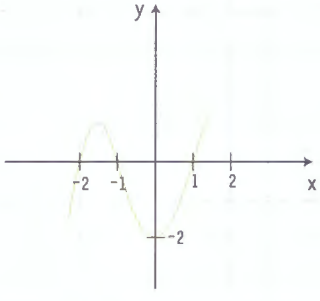
**5)** El conjunto de positividad de la función es y el de negatividad .

● **Marquen con una X el gráfico que corresponde a la función $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$, según el análisis anterior.**

**6)** **a)**




**b)**




## APLICACIÓN 48

### Ejercicio 48.1

● **Grafiquen aproximadamente la siguiente función polinómica.**

$f(x) = 2x^3 - 6x - 4$

# Gráfico aproximado de una función polinómica

## Ejercicio 48.2

- **Grafiquen aproximadamente las siguientes funciones polinómicas.**

Indiquen en cada caso: ordenada al origen, raíces y orden de multiplicidad, conjunto de positividad y negatividad.

**1)** $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

**2)** $f(x) = -2x^4 - 11x^3 - 11x^2 + 15x + 9$

**3)** $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3$

**4)** $f(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{12}x^3 - x^2$

PARADA TEÓRICA 49

# Funciones racionales

*Una* **función racional** *responde a la forma* $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, *donde* $P(x)$ *y* $Q(x)$ *son polinomios.*

El **dominio** de una función racional es el conjunto de los valores de la variable que no anulan el denominador.

**a)** $f_1(x) = \frac{x+3}{x-3}$ $\quad D_{f_1} = \mathbb{R} - \{3\}$

**b)** $f_2(x) = \frac{x+5}{x^2-4}$ $\quad D_{f_2} = \mathbb{R} - \{-2;2\}$

**6)** $f_3(x) = \frac{x^3+2}{x^4+1}$ $\quad D_{f_3} = \mathbb{R}$

Para realizar el gráfico aproximado de una función racional, se debe:

• Hallar **la intersección con el eje y**, la cual existe si 0 (cero) pertenece al dominio de la función y es el punto **(0;f(0))**.

• Hallar las **raíces o ceros** de la función, que son los valores que pertenecen al dominio de la misma y que anulan la función, o sea, las raíces del numerador.

$P(x_n) = 0 \Rightarrow f(x_n) = 0$

• Calcular la **asíntota vertical** de $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, que es el valor $\alpha$ para el cual se verifica que:

$Q(\alpha) = 0 \wedge P(\alpha) \neq 0 \Rightarrow x = \alpha$ **es asíntota vertical (A.V.)**

• Calcular la **asíntota horizontal**, que en una función racional existe si el grado del polinomio numerador es menor o igual al grado del polinomio denominador.

**grado** $P(x) <$ **grado** $Q(x) \Rightarrow y = 0$ **es asíntota horizontal (A.H.)**

**grado** $P(x) =$ **grado** $Q(x) \Rightarrow y =$ $\frac{\text{coeficiente principal de } P(x)}{\text{coeficiente principal de } Q(x)}$ **es A.H.**

$f(x) = \frac{x-2}{x-1} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

• ***Intersección con el eje y***

$f(0) = 2 \Rightarrow (0;2)$ es la intersección con el eje

• ***Raíces***

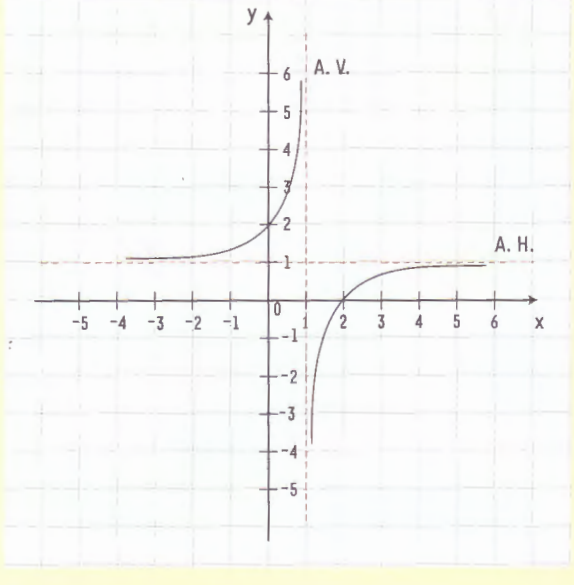
$x - 2 \Rightarrow 0 \Rightarrow x = 2$

• ***Asíntota vertical***

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

• ***Asíntota horizontal***

$y = \frac{1}{1} \Rightarrow y = 1$



# Funciones racionales

PARADA PRÁCTICA 49

## VERIFICACIÓN 49

- **Completen la siguiente tabla.**

| Función | Dominio | Asíntota horizontal | Asíntota vertical |
|---|---|---|---|
| 1) $y = \frac{x + 2}{x - 3}$ | | | |
| 2) $y = \frac{2}{x^2 - 16}$ | | | |

## APLICACIÓN 49

### Ejercicio 49.1

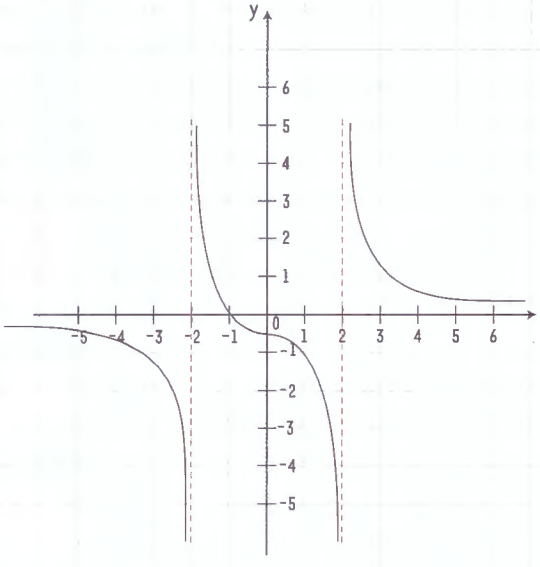
- **Marquen con una X la ecuación que corresponde a cada una de las gráficas de las siguientes funciones racionales.**

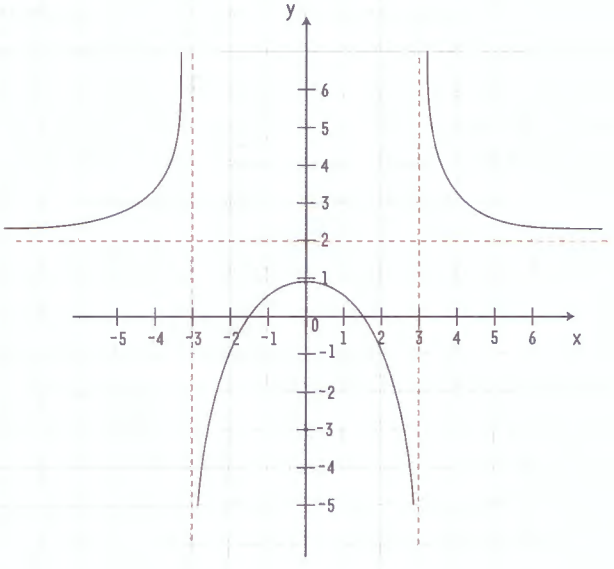
1)

| | |
|---|---|
| $y = \frac{x + 1}{x^2 + 4}$ | |
| $y = \frac{x + 1}{x^2 - 4}$ | |
| $y = \frac{x - 4}{x^2 + 1}$ | |

2)

| | |
|---|---|
| $y = \frac{x^2 - 9}{2x^2 - 7}$ | |
| $y = \frac{x^2 + 9}{x^2 - 7}$ | |
| $y = \frac{2x^2 - 7}{x^2 - 9}$ | |



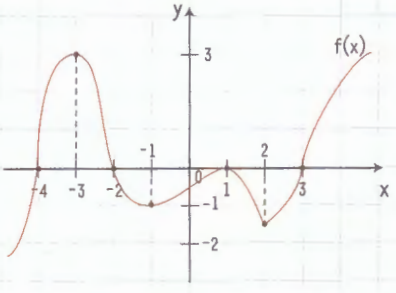
# TRAMO G: ejercitación final

INTEGRACIÓN G

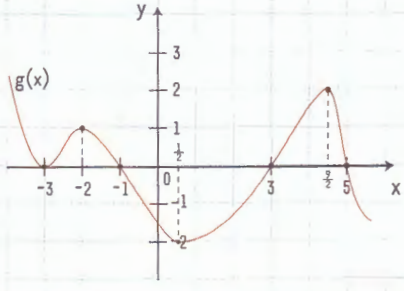
## Ejercicio G.1

- **Completen la tabla referida a las siguientes funciones polinómicas.**

**1)**




**2)**




| | Positividad | Negatividad | Intervalos de crecimiento | Intervalos de decrecimiento |
|---|---|---|---|---|
| f(x) | | | | |
| g(x) | | | | |

## Ejercicio G.2

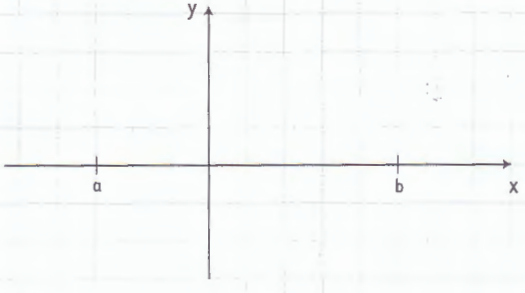
- **Realicen el gráfico de cada función según las características indicadas en cada caso.**

**1)** Función polinómica de grado 3.

$x_1 = a$; es una raíz doble.

$x_2 = b$; es una raíz simple.

$\forall x : x \in (b; +\infty) \Rightarrow f(x) < 0.$

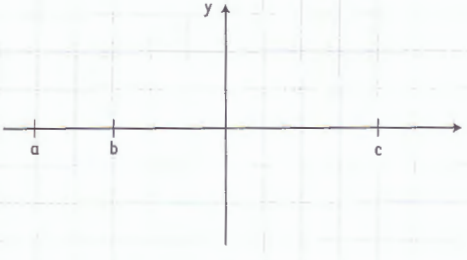



**2)** Función polinómica de grado 4.

$x_1 = a$ y $x_2 = b$; son raíces simples.

$x_3 = c$; es una raíz doble

$\forall x : x \in (a;b) \Rightarrow f(x) > 0.$

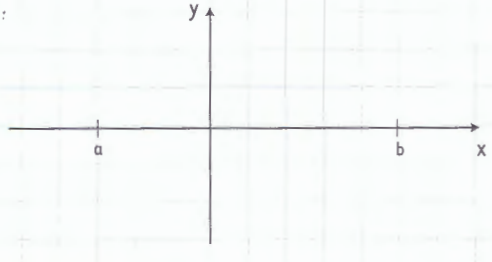



**3)** Función polinómica de grado 5.

$x_1 = a$; es una raíz doble.

$x_2 = b$; es una raíz triple.

$\forall x : x \in (-\infty; a) \Rightarrow f(x) < 0.$



## Ejercicio G.3

● **Completen el siguiente cuadro.**

| | Función | Forma factorizada | Ordenada al origen | Conjunto de positividad | Conjunto de negatividad |
|---|---|---|---|---|---|
| 1) | $y = 5x^2 - x - 4$ | | | | |
| 2) | $y = x^3 - x^2 - 2x$ | | | | |
| 3) | $y = x^3 + x^2 - x - 1$ | | | | |

## Ejercicio G.4

● **Grafiquen aproximadamente la función polinómica $f(x) = x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x^2$.**

Indiquen: ordenada al origen, raíces y orden de multiplicidad, conjunto de positividad y negatividad.

# TRAMO G: ejercitación final

## Ejercicio G.5

La temperatura (en grados Celsius) en función del tiempo, medido en horas, para un determinado lugar está dada por la función $f(t) = -\frac{1}{25}t(t - 12)(t - 24)$.

- **Realicen un gráfico aproximado para $0 \leq t \leq 24$.**

1)

- **Respondan.**

2) ¿Durante qué horas del día la temperatura es superior a cero grado?

3) ¿Llega la temperatura en algún momento, antes de las 3 de la mañana, a ser de $-20°C$ ?

## Ejercicio G.6

- **Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda.**

1) La función $f(x) = x^5 + 3x^2 - 2$ tiene tres raíces dobles. ☐

2) La función $f(x) = x^4 + 2$ es siempre positiva. ☐

3) La función $f(x) = -2x + 1$ es siempre decreciente. ☐

4) El dominio de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es el conjunto de los números reales. ☐

5) La función $f(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$ tiene dos asíntotas verticales. ☐

6) La función $f(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$ corta el eje x en el punto $(2;0)$. ☐

## Ejercicio G.7

● **Escriban los datos que se piden para cada una de las funciones y realicen el gráfico aproximado.**

**1)** $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x^3 + 8}$

| Dominio | Asíntota vertical | Asíntota horizontal | f(0) | f(-1) | f(-3) | f(-4) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

**2)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2x^2 - 1}$

| Dominio | Asíntota vertical | Asíntota horizontal | f(0) | $f\left(\frac{1}{2}\right)$ | $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ | f(2) | f(-2) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

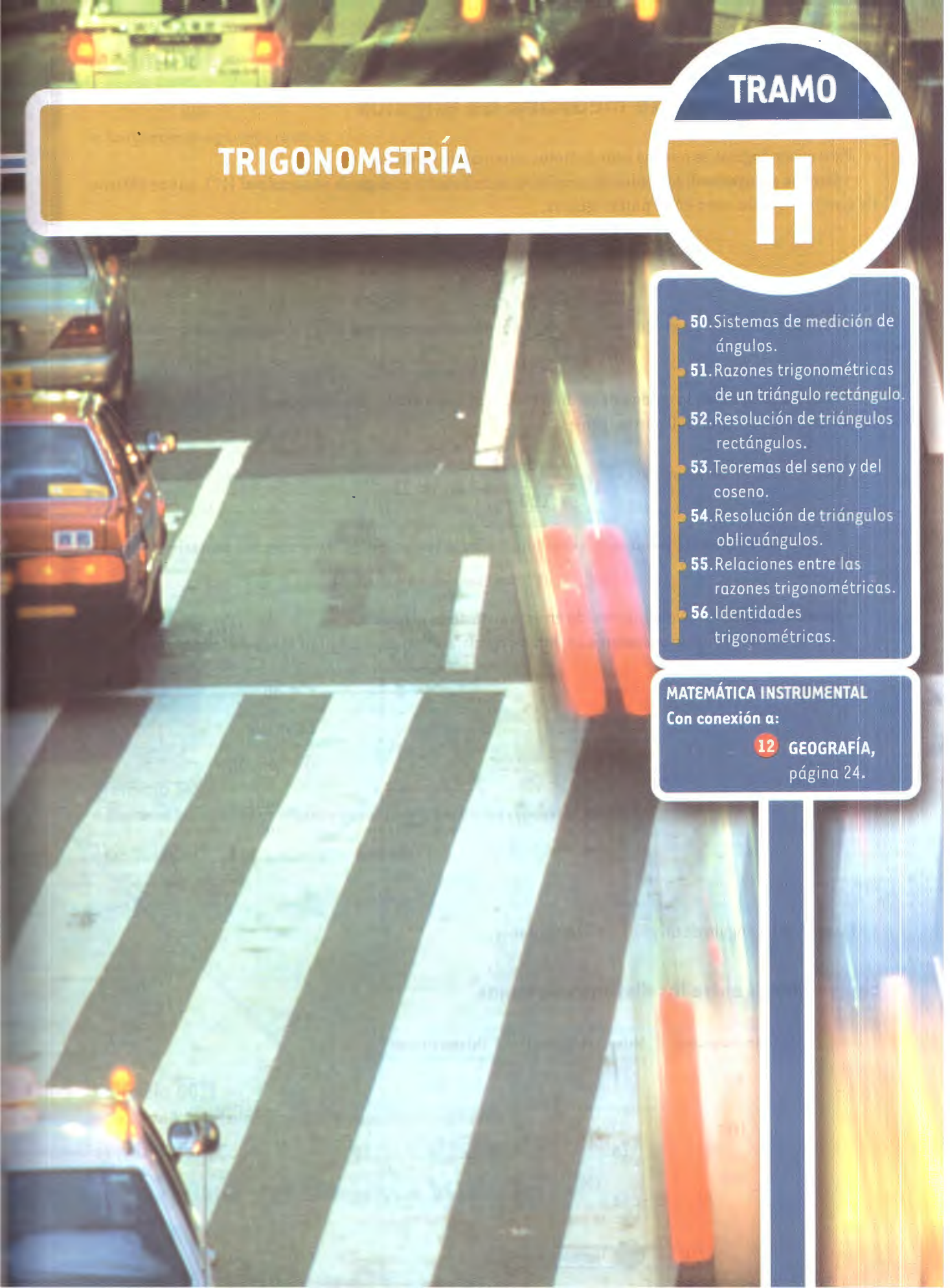
# TRAMO G: ejercitación final

**3)** $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 4}{x - 2}$

| Dominio | Asíntota vertical | Asíntota horizontal | f(0) | f(1) | f(3) | f(4) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

**4)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

| Dominio | Asíntota vertical | Asíntota horizontal | f(0) | f(1) | f(2) |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |



# TRIGONOMETRÍA

TRAMO

H


- **50.** Sistemas de medición de ángulos.
- **51.** Razones trigonométricas de un triángulo rectángulo.
- **52.** Resolución de triángulos rectángulos.
- **53.** Teoremas del seno y del coseno.
- **54.** Resolución de triángulos oblicuángulos.
- **55.** Relaciones entre las razones trigonométricas.
- **56.** Identidades trigonométricas.


**MATEMÁTICA INSTRUMENTAL**

**Con conexión a:**


12 **GEOGRAFÍA,** página 24.

PARADA TEÓRICA 50

# Sistemas de medición de ángulos

Para medir ángulos se pueden usar distintos sistemas de medición.

• **Sistema sexagesimal**: la unidad de medida en este sistema es el **grado sexagesimal** $(1°)$, que se obtiene de dividir el ángulo recto en 90 partes iguales.

$$1° = \frac{1R}{90} \Rightarrow 1R = 90°$$

Los submúltiplos del grado sexagesimal son el **minuto sexagesimal** $(1')$ y el **segundo sexagesimal** $(1'')$.

$$1° = 60' \wedge 1' = 60'' \Rightarrow 1° = 3.600''$$

• **Sistema centesimal**: la unidad de medida en este sistema es el **grado centesimal** $(1^G)$, que se obtiene de dividir el ángulo recto en 100 partes iguales.

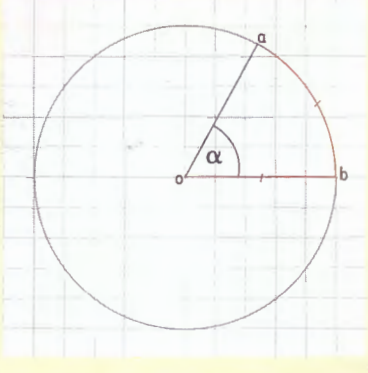
$$1^G = \frac{1R}{100} \Rightarrow 1R = 100^G$$

Los **submúltiplos** del grado centesimal son el **minuto centesimal** $(1^M)$ y el **segundo centesimal** $(1^S)$.

$$1^G = 100^M \wedge 1^M = 100^S \Rightarrow 1^G = 10.000^S$$

• **Sistema circular**: la unidad de medida en este sistema es el **radián**.

*Se llama **radián** al ángulo que abarca un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la misma.*




$r = \overline{ob}$

$\widehat{ab} = \overline{ob}$

$\hat{\alpha} = 1$ radián

$\hat{\alpha} = \frac{\widehat{ab}}{\overline{ob}}$

El valor de un ángulo de un giro es de $2\pi$ radianes.

## Equivalencias entre los distintos sistemas

| Sistema sexagesimal | Sistema centesimal | Sistema circular |
|---|---|---|
| 90° | $100^G$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| 180° | $200^G$ | $\pi$ |
| 360° | $400^G$ | $2\pi$ |

# Sistema de medición de ángulos

PARADA PRÁCTICA 50

## VERIFICACIÓN 50

- **Completen el siguiente cuadro.**

| | Sistema sexagesimal | Sistema circular | Sistema centesimal |
|---|---|---|---|
| 1) | 270° | | |
| 2) | | $\frac{\pi}{6}$ | |
| 3) | | | $50^{G}$ |

## APLICACIÓN 50

### Ejercicio 50.1

- **Calculen, en grados sexagesimales, el valor aproximado de cada uno de los siguientes ángulos.**

**1)** $\hat{\alpha} = 1$ radián

**2)** $\hat{\beta} = 8\pi$

**3)** $\hat{\delta} = \frac{\pi}{3}$

**4)** $\hat{\gamma} = 3{,}5$ radianes

### Ejercicio 50.2

- **Expresen los siguientes ángulos en radianes, dando las repuestas en función de $\pi$.**

**1)** $\hat{\rho} = 150°$

**2)** $\hat{\varepsilon} = 210°$

**3)** $\hat{\lambda} = 60°$

**4)** $\hat{\mu} = 315°$

### Ejercicio 50.3

- **Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda.**

**1)** $120° = 120^{G}$ ☐

**2)** $15°\,24' = 924'$ ☐

**3)** $132{,}5° = 132°\,5'$ ☐

**4)** $147{,}5^{G} = 147^{G}\,50^{M}$ ☐

**5)** $\frac{5}{4}\pi = 225°$ ☐

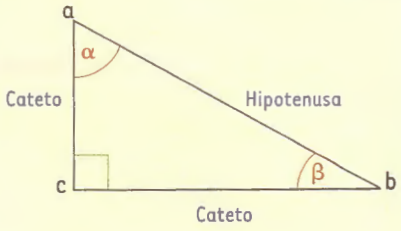
**6)** $\frac{1}{18}\pi = 10°$ ☐

PARADA TEÓRICA 51

# Razones trigonométricas de un triángulo rectángulo

En un triángulo rectángulo se cumple:

- Que los ángulos agudos son complementarios. $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90°$
- El teorema de Pitágoras. $\overline{ab}^2 = \overline{ac}^2 + \overline{cb}^2$




## Razones trigonométricas

Se llaman razones trigonométricas a aquellas que relacionan las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo con los ángulos agudos del mismo.

Para cada uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, uno de los catetos es el adyacente y el otro es el opuesto.

Las razones trigonométricas se definen de la siguiente manera:

- **Seno** de un ángulo.

*Es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa.*

$$\text{sen } x = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

- **Coseno** de un ángulo.

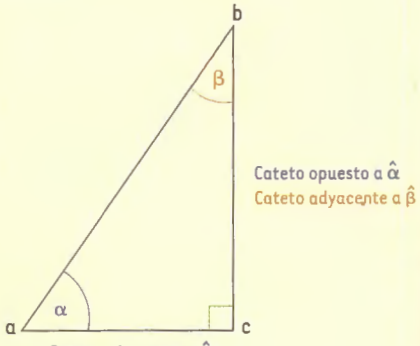
*Es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa.*

$$\cos x = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

- **Tangente** de un ángulo.

*Es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.*

$$\text{tg } x = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$




$$\text{sen } \hat{\alpha} = \frac{\overline{cb}}{ab} \wedge \text{sen } \hat{\beta} = \frac{\overline{ac}}{ab}$$

$$\cos \hat{\alpha} = \frac{\overline{ac}}{ab} \wedge \cos \hat{\beta} = \frac{\overline{cb}}{ab}$$

$$\text{tg } \hat{\alpha} = \frac{\overline{cb}}{ac} \wedge \text{tg } \hat{\beta} = \frac{\overline{ac}}{cb}$$

Si se conoce el ángulo y se quiere hallar el valor de la función trigonométrica:

**a)** sen 30° = 0,5 → 3 0 sin

**b)** cos 40° 20′ ≅ 0,762 → 4 0 °′″ 2 0 °′″ cos

**c)** tg 125° 15′ 16″ ≅ -1,415 → 1 2 5 °′″ 1 5 °′″ 1 6 °′″ tan

Si se conoce la función trigonométrica y se quiere saber a qué ángulo corresponde:

**a)** sen x = 0,25 ⇒ x ≅ 14° 28′ 39″ → 0 . 2 5 SHIFT sin SHIFT °′″

**b)** cos x = -0,478 ⇒ x ≅ 118° 33′ 18″ → 0 . 4 7 8 +/- SHIFT cos SHIFT °′″

**c)** tg x = 1,457 ⇒ x ≅ 55° 32′ 12″ → 1 . 4 5 7 SHIFT tan SHIFT °′″

# Razones trigonométricas de un triángulo rectángulo

PARADA PRÁCTICA 51

## VERIFICACIÓN 51

- **Escriban las razones trigonométricas correspondientes al siguiente triángulo rectángulo.**

**1)** $\operatorname{sen} \hat{\alpha} =$

**2)** $\cos \hat{\alpha} =$

**3)** $\operatorname{tg} \hat{\alpha} =$

**4)** $\operatorname{sen} \hat{\beta} =$

**5)** $\cos \hat{\beta} =$

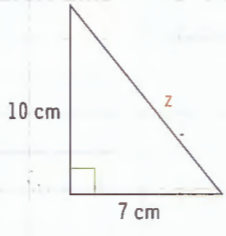
**6)** $\operatorname{tg} \hat{\beta} =$

## APLICACIÓN 51

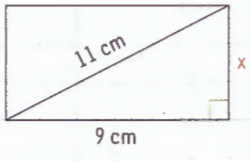
### Ejercicio 51.1

- **Hallen el valor del lado desconocido en cada una de las siguientes figuras.**

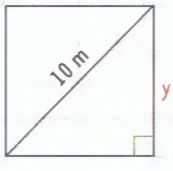
**1)**




**2)**




**3)**




### Ejercicio 51.2

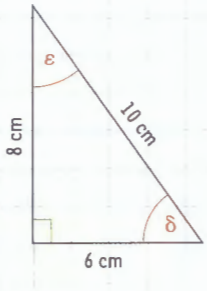
- **Hallen la razón trigonométrica y, con la calculadora, el ángulo correspondiente.**

**1)** $\operatorname{sen} \hat{\varepsilon} =$ $\Rightarrow$ $\hat{\varepsilon} \cong$

**2)** $\cos \hat{\varepsilon} =$ $\Rightarrow$ $\hat{\varepsilon} \cong$

**3)** $\operatorname{sen} \hat{\delta} =$ $\Rightarrow$ $\hat{\delta} \cong$

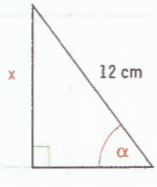
**4)** $\operatorname{tg} \hat{\delta} =$ $\Rightarrow$ $\hat{\delta} \cong$



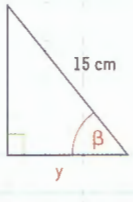

### Ejercicio 51.3

- **Calculen los valores de los datos en rojo en cada una de las siguientes figuras.**

**1)** $\operatorname{sen} \hat{\alpha} = 0{,}896$




**2)** $\cos \hat{\beta} = 0{,}347$



PARADA TEÓRICA 52

# Resolución de triángulos rectángulos

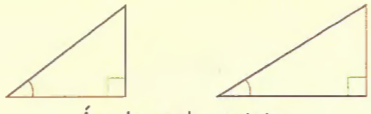
Resolver un triángulo significa conocer el valor de sus **tres ángulos** y sus **tres lados**.

Un triángulo queda perfectamente determinado si se conocen tres de sus elementos, siempre que uno de ellos sea un lado.

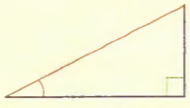
Para resolver un **triángulo rectángulo**, como el ángulo recto ya está determinado, se debe conocer al menos el valor de uno de sus ángulos agudos y un lado, o el valor de dos de sus lados.

## Resolución de triángulos rectángulos

• *Dados un ángulo agudo y uno de sus lados.*



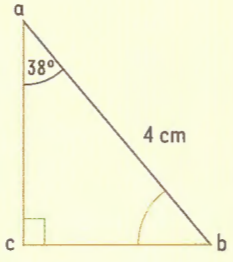
Ángulo agudo y cateto



Ángulo agudo e hipotenusa

Para calcular el ángulo $\hat{b}$, debe aplicarse la propiedad de los ángulos agudos.

$\hat{a} + \hat{b} = 90° \Rightarrow \hat{b} = 90° - \hat{a} \Rightarrow \hat{b} = 90° - 38° \Rightarrow \mathbf{\hat{b} = 52°}$




Para calcular el lado $\overline{ac}$, se debe recurrir a una razón trigonométrica que relacione los dos datos con el lado.

$$\cos \hat{a} = \frac{\overline{ac}}{\overline{ab}} \Rightarrow \overline{ac} = \overline{ab}.\cos \hat{a} \Rightarrow \overline{ac} = 4 \text{ cm}.\cos 38° \Rightarrow \overline{ac} \cong 4 \text{ cm}.0{,}79$$

$\mathbf{\overline{ac} \cong 3{,}16 \text{ cm}}$

Para calcular el lado $\overline{bc}$ se razona de la misma manera.

$$\text{sen } \hat{a} = \frac{\overline{bc}}{\overline{ab}} \Rightarrow \overline{bc} = \overline{ab}.\text{sen } \hat{a} \Rightarrow \overline{bc} = 4 \text{ cm}.\text{sen } 38° \Rightarrow \overline{bc} \cong 4 \text{ cm}.0{,}62 \Rightarrow \mathbf{\overline{bc} \cong 2{,}48 cm}$$

• *Dados dos de sus lados.*

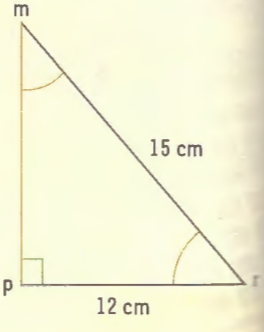
Dos catetos

Cateto e hipotenusa

Para calcular el lado $\overline{mp}$, debe aplicarse el teorema de Pitágoras.

$$\overline{mr}^2 = \overline{rp}^2 + \overline{mp}^2 \Rightarrow \overline{mp} = \sqrt{\overline{mr}^2 - \overline{rp}^2} \Rightarrow \overline{mp} = \sqrt{(15 \text{ cm})^2 - (12 \text{ cm})^2} \Rightarrow$$

$$\overline{mp} = \sqrt{225 \text{ cm}^2 - 144 \text{ cm}^2} \Rightarrow \mathbf{\overline{mp} = 9 \text{ cm}}$$




Para calcular el ángulo $\hat{m}$, se debe recurrir a una razón trigonométrica que relacione los dos datos con el ángulo.

$$\text{sen } \hat{m} = \frac{\overline{rp}}{\overline{mr}} \Rightarrow \text{sen } \hat{m} = \frac{12 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} \Rightarrow \text{sen } \hat{m} = 0{,}8 \Rightarrow \mathbf{\hat{m} \cong 53° 7' 48''}$$

Para calcular el ángulo $\hat{r}$, debe razonarse de la misma manera.

$$\cos \hat{r} = \frac{\overline{rp}}{\overline{mr}} \Rightarrow \cos \hat{r} = \frac{12 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} \Rightarrow \cos \hat{r} = 0{,}8 \Rightarrow \mathbf{\hat{r} \cong 36° 52' 12''}$$

# Resolución de triángulos rectángulos

PARADA PRÁCTICA 52

## VERIFICACIÓN 52

● **Unan con flechas cada una de las relaciones con la/s figura/s correspondiente/s.**

1) $\hat{\beta} + \hat{\alpha} = 90°$

2) $\text{tg}\,\hat{\beta} = \frac{7}{5}$

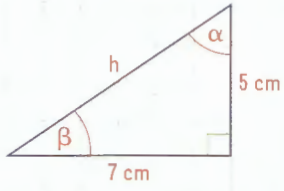
3) $\text{tg}\,\hat{\alpha} = \frac{5}{7}$

4) $\text{tg}\,\hat{\alpha} = \frac{7}{5}$

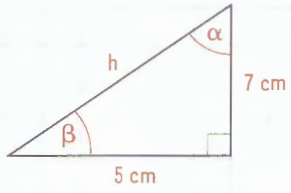
5) $h^2 = 5^2 + 7^2$

6) $\cos\hat{\alpha} = \frac{5}{h}$

a)




b)




## APLICACIÓN 52

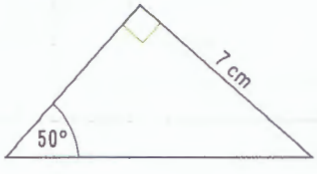
### Ejercicio 52.1

● **Calculen el perímetro de cada una de las siguientes figuras.**

1)

3)

2)



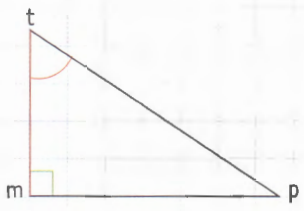

4)

# Resolución de triángulos rectángulos

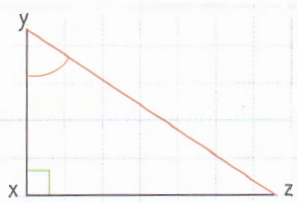
## Ejercicio 52.2

- **Resuelvan los siguientes triángulos rectángulos.**

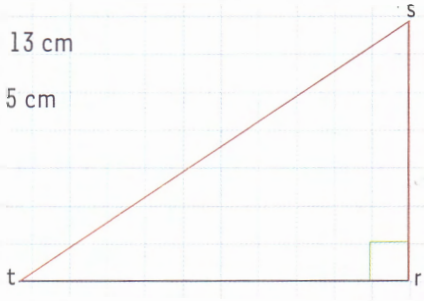
**1)** $\begin{cases} \hat{t} = 37° 20' \\ \overline{tm} = 20 \text{ cm} \end{cases}$



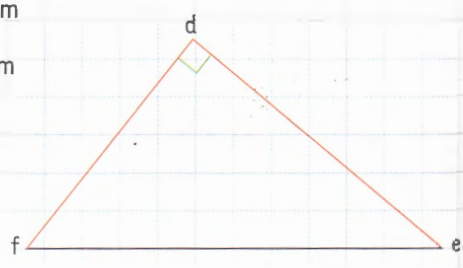

**3)** $\begin{cases} \hat{y} = 53° 20' \\ \overline{yz} = 33 \text{ cm} \end{cases}$




**2)** $\begin{cases} \overline{st} = 13 \text{ cm} \\ \overline{sr} = 5 \text{ cm} \end{cases}$



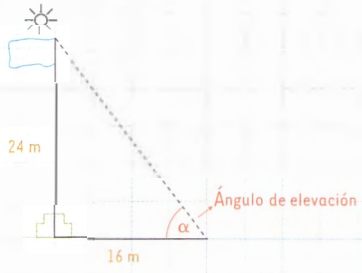

**4)** $\begin{cases} \overline{de} = 12 \text{ cm} \\ \overline{df} = 20 \text{ cm} \end{cases}$



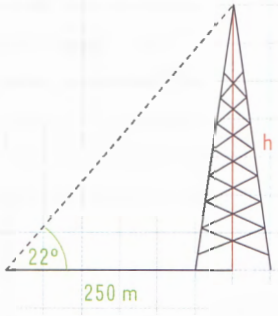
## Ejercicio 52.3

**● Planteen y resuelvan los siguientes problemas.**

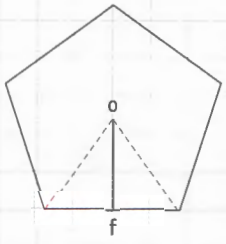
**1)** ¿Cuál es el ángulo de elevación del sol cuando un mástil de 24 m proyecta una sombra de 16 m?



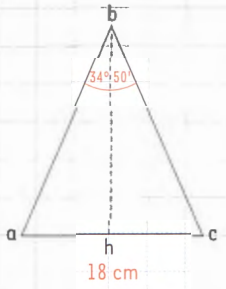

**2)** ¿Cuál es la altura de una antena si una persona que se encuentra a 250 m de su base, observa su punta bajo un ángulo de 22°?



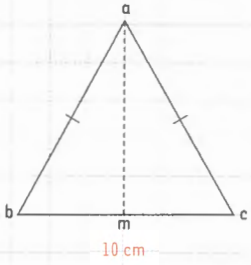

**3)** ¿Cuál es el área de un pentágono regular de 40 cm de perímetro?




**4)** ¿Cuál es el área de un triángulo isósceles, cuya base mide 18 cm y el ángulo opuesto a ella mide 34° 50′?




**5)** El perímetro de un triángulo isósceles es de 26 cm y su base mide 10 cm.
¿Cuál es el valor de sus ángulos interiores?



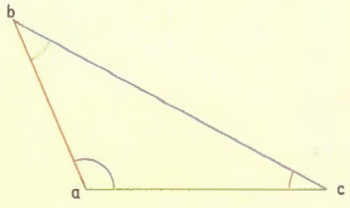
PARADA TEÓRICA 53

# Teoremas del seno y del coseno

Los siguientes teoremas relacionan los lados de cualquier triángulo con sus ángulos interiores.

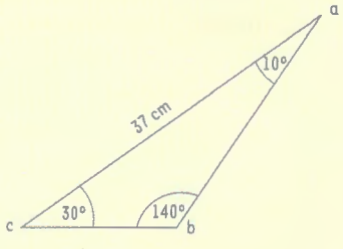
## Teorema del seno

*En todo triángulo sus lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.*




$$\frac{\overline{ab}}{\operatorname{sen}\hat{c}} = \frac{\overline{ac}}{\operatorname{sen}\hat{b}} = \frac{\overline{bc}}{\operatorname{sen}\hat{a}}$$

Para calcular los lados $\overline{ab}$ y $\overline{cb}$ se aplica el teorema del seno.

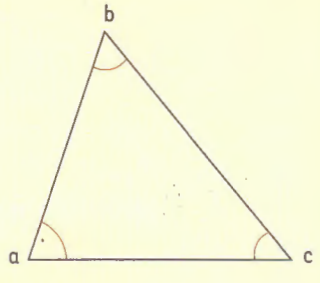



$$\frac{37\text{ cm}}{\operatorname{sen} 140°} = \frac{\overline{ab}}{\operatorname{sen} 30°} \Rightarrow \overline{ab} \cong 28{,}78\text{ cm}$$

$$\frac{37\text{ cm}}{\operatorname{sen} 140°} = \frac{\overline{cb}}{\operatorname{sen} 10°} \Rightarrow \overline{cb} \cong 10\text{ cm}$$

## Teorema del coseno

*El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del producto de dichos lados por el coseno del ángulo que forman.*

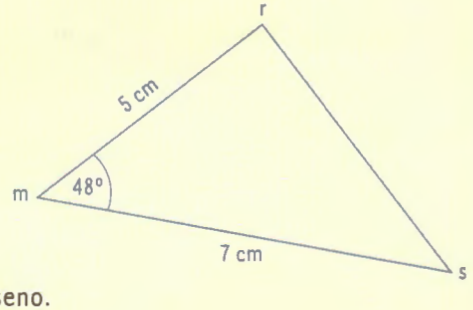



$$\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 - 2.\overline{ab}.\overline{ac}.\cos\hat{a}$$

$$\overline{ac}^2 = \overline{bc}^2 + \overline{ab}^2 - 2.\overline{bc}.\overline{ab}.\cos\hat{b}$$

$$\overline{ab}^2 = \overline{bc}^2 + \overline{ac}^2 - 2.\overline{bc}.\overline{ac}.\cos\hat{c}$$

Para calcular el lado $\overline{rs}$ se aplica el teorema del coseno.




$$\overline{rs}^2 = \overline{mr}^2 + \overline{ms}^2 - 2.\overline{mr}.\overline{ms}.\cos\hat{m}$$

$$\overline{rs}^2 \cong 25\text{ cm}^2 + 49\text{ cm}^2 - 2.5\text{ cm}.7\text{ cm}.0{,}67$$

$$\overline{rs}^2 \cong 27{,}1\text{ cm}^2 \Rightarrow \overline{rs} \cong 5{,}21\text{ cm}$$

El **teorema de Pitágoras** es un caso particular del teorema del coseno.

$$\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 - 2.\overline{ab}.\overline{ac}.\cos\hat{a}$$

$$\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 - \underbrace{2.\overline{ab}.\overline{ac}.\cos 90°}_{0}$$

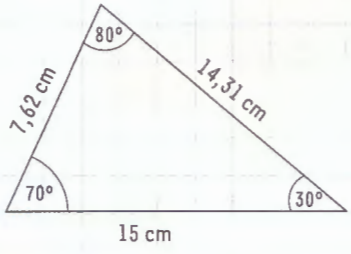
$$\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2$$

# Teoremas del seno y del coseno

PARADA PRÁCTICA 53

## VERIFICACIÓN 53

- **Escriban las relaciones que establecen el teorema del seno y del coseno con los datos de la siguiente figura y verifiquen aproximadamente los resultados.**

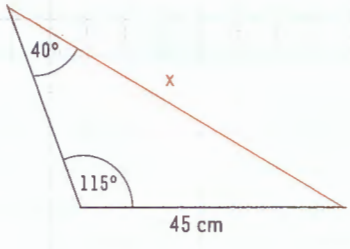



## APLICACIÓN 53

### Ejercicio 53.1

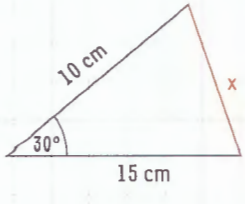
- **Calculen el valor de x en cada una de las figuras.**

**1)**

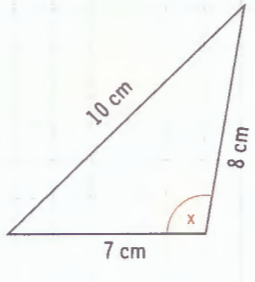



**3)**

**2)**




**4)**



PARADA TEÓRICA 54

# Resolución de triángulos oblicuángulos

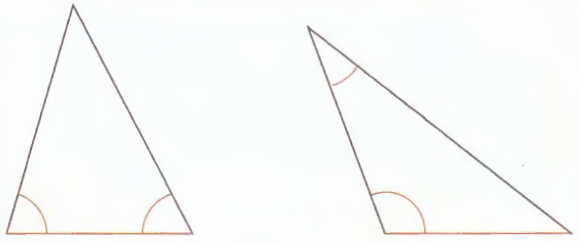
Un triángulo es **oblicuángulo** cuando ninguno de sus ángulos interiores es recto, y resolverlo es hallar el valor de sus tres ángulos y sus tres lados. Para ello hay que aplicar el teorema del seno, del coseno y la propiedad de la suma de sus ángulos interiores, que es de 180°.

Siempre que sea posible se deben utilizar los datos y no los resultados obtenidos.

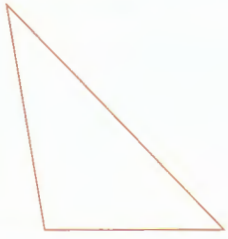
Se pueden presentar distintos casos:

**Dos lados y el ángulo comprendido**

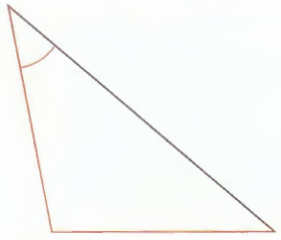
**Un lado y dos ángulos**



**Los tres lados**



**Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos**



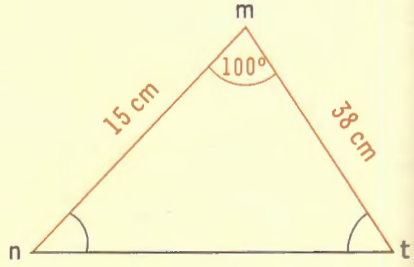
Resolver un triángulo oblicuángulo dados **dos lados** y el **ángulo comprendido**.

- Se aplica el teorema del coseno para calcular el lado $\overline{nt}$.

$$\overline{nt}^2 = (15\text{ cm})^2 + (38\text{ cm})^2 - 2.15\text{ cm}.38\text{ cm}.\cos 100°$$

$$\overline{nt}^2 \cong 225\text{ cm}^2 + 1.444\text{ cm}^2 + 197{,}96\text{ cm}^2$$

$$\boldsymbol{\overline{nt} \cong 43{,}21\text{ cm}}$$




- Se aplica el teorema del seno para averiguar los ángulos $\hat{n}$ y $\hat{t}$.

$$\frac{38\text{ cm}}{\operatorname{sen}\hat{n}} = \frac{43{,}21\text{ cm}}{\operatorname{sen} 100°} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{n} \cong \frac{38\text{ cm}.\operatorname{sen} 100°}{43{,}21\text{ cm}} \Rightarrow \boldsymbol{\hat{n} \cong 60°}$$

$$\frac{15\text{ cm}}{\operatorname{sen}\hat{t}} = \frac{43{,}21\text{ cm}}{\operatorname{sen} 100°} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{t} \cong \frac{15\text{ cm}.\operatorname{sen} 100°}{43{,}21\text{ cm}} \Rightarrow \boldsymbol{\hat{t} \cong 20°}$$

Para verificar los resultados obtenidos se puede utilizar la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

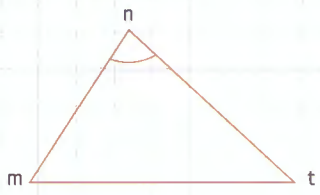
# Resolución de triángulos oblicuángulos

PARADA PRÁCTICA 54

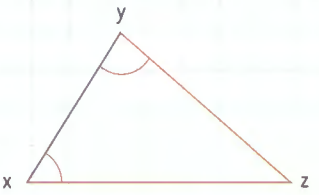
## VERIFICACIÓN 54

- Relacionen los datos en rojo de cada una de las figuras aplicando el teorema del seno o del coseno.

1)




2)

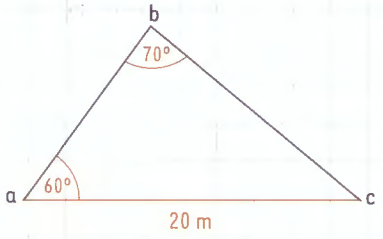



## APLICACIÓN 54

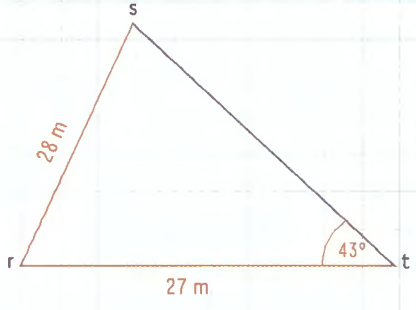
### Ejercicio 54.1

- Resuelvan los siguientes triángulos oblicuángulos.

1)




2)

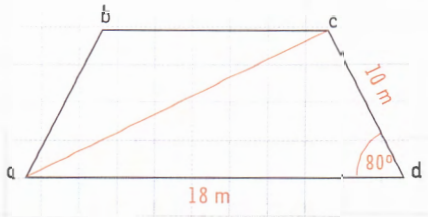


# Resolución de triángulos oblicuángulos

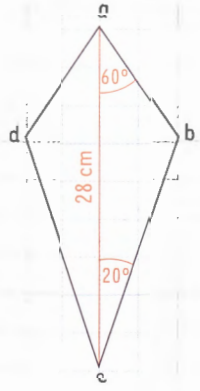
## Ejercicio 54.2

● **Calculen.**

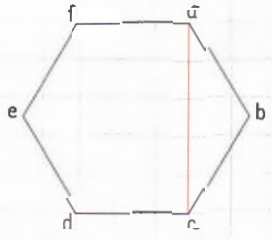
**1)** El valor de la diagonal $\overline{ac}$ del trapecio isósceles abcd.




**2)** El perímetro del romboide abcd.



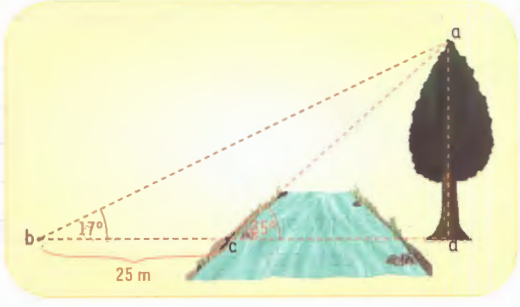

**3)** El valor de la diagonal $\overline{ac}$ del hexágono regular abcdef, si el perímetro del mismo es de 72 cm.



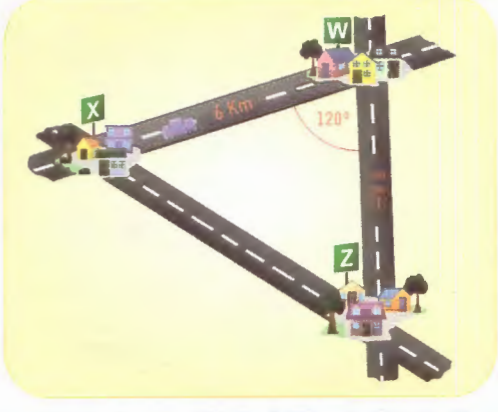
## Ejercicio 54.3

**• Planteen y resuelvan cada uno de los siguientes problemas.**

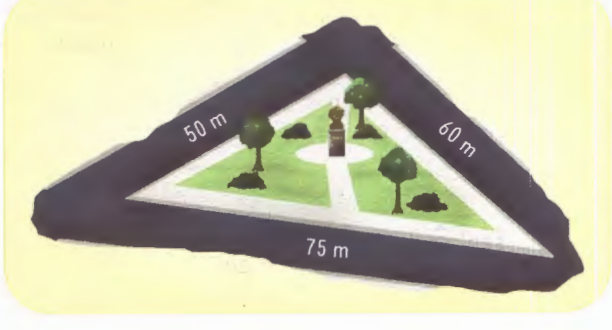
**1)** Un árbol está situado en la orilla de un río. El extremo superior del árbol, desde un cierto punto (ubicado en la otra margen del río), determina un ángulo de elevación de 17°.
Si a 25 m de dicho punto y en dirección al árbol, el ángulo es de 35°, ¿cuál es la altura del mismo?




**2)** Tres pueblos X, W y Z, están unidos por carreteras rectas. La distancia entre X y W es de 6 km; a los pueblos W y Z los separan 9 km. El ángulo que forman las carreteras que unen X con W y W con Z es de 120°.
¿Qué distancia hay entre X y Z?




**3)** En una plazoleta de forma triangular, los lados miden 60 m, 75 m y 50 m.
¿Qué ángulos se forman en las esquinas de la misma?



PARADA TEÓRICA 55

# Relaciones entre las razones trigonométricas

A partir de las razones trigonométricas definidas en un triángulo rectángulo, se definen sus recíprocas.

*Razones directas* *Razones recíprocas*

$$\text{sen}\,\hat{\alpha} = \frac{\text{cat. op.}}{\text{hipot.}} \longrightarrow \text{cosec}\,\hat{\alpha} = \frac{\text{hipot.}}{\text{cat. op.}} = \frac{1}{\frac{\text{cat. op.}}{\text{hipot.}}} = \frac{1}{\text{sen}\,\hat{\alpha}} \Rightarrow \boxed{\text{sen}\,\hat{\alpha} = \frac{1}{\text{cosec}\,\hat{\alpha}}}$$

$$\cos\hat{\alpha} = \frac{\text{cat. ady.}}{\text{hipot.}} \longrightarrow \sec\hat{\alpha} = \frac{\text{hipot.}}{\text{cat. ady.}} = \frac{1}{\frac{\text{cat. ady.}}{\text{hipot.}}} = \frac{1}{\cos\hat{\alpha}} \Rightarrow \boxed{\cos\hat{\alpha} = \frac{1}{\sec\hat{\alpha}}}$$

$$\text{tg}\,\hat{\alpha} = \frac{\text{cat. op.}}{\text{cat. ady}} \longrightarrow \text{ctg}\,\hat{\alpha} = \frac{\text{cat. ady}}{\text{cat. op.}} = \frac{1}{\frac{\text{cat. op.}}{\text{cat. ady}}} = \frac{1}{\text{tg}\,\hat{\alpha}} \Rightarrow \boxed{\text{tg}\,\hat{\alpha} = \frac{1}{\text{ctg}\,\hat{\alpha}}}$$

Entre las razones anteriores se pueden establecer ciertas relaciones:

$$\text{tg}\,\hat{\alpha} = \frac{\text{cat. op.}}{\text{cat. ady.}} = \frac{\frac{\text{cat. op.}}{\text{hipot.}}}{\frac{\text{cat. ady}}{\text{hipot.}}} = \frac{\text{sen}\,\hat{\alpha}}{\cos\hat{\alpha}} \Rightarrow \boxed{\text{tg}\,\hat{\alpha} = \frac{\text{sen}\,\hat{\alpha}}{\cos\hat{\alpha}}}$$

$$\text{ctg}\,\hat{\alpha} = \frac{\text{cat. ady.}}{\text{cat. op.}} = \frac{\frac{\text{cat. ady.}}{\text{hipot.}}}{\frac{\text{cat. op.}}{\text{hipot.}}} = \frac{\cos\hat{\alpha}}{\text{sen}\,\hat{\alpha}} \Rightarrow \boxed{\text{ctg}\,\hat{\alpha} = \frac{\cos\hat{\alpha}}{\text{sen}\,\hat{\alpha}}}$$

## Relación pitagórica

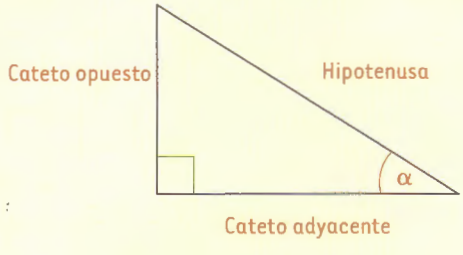
$$\text{sen}^2\hat{\alpha} + \cos^2\hat{\alpha} = \left(\frac{\text{cat. op.}}{\text{hipot.}}\right)^2 + \left(\frac{\text{cat. ady.}}{\text{hipot.}}\right)^2$$

$$\text{sen}^2\hat{\alpha} + \cos^2\hat{\alpha} = \frac{\text{cat. op.}^2}{\text{hipot.}^2} + \frac{\text{cat. ady.}^2}{\text{hipot.}^2}$$

$$\text{sen}^2\hat{\alpha} + \cos^2\hat{\alpha} = \frac{\text{cat. op.}^2 + \text{cat. ady.}^2}{\text{hipot.}^2}$$

$$\text{sen}^2\hat{\alpha} + \cos^2\hat{\alpha} = \frac{\text{hipot.}^2}{\text{hipot.}^2} = 1$$

$$\boxed{\text{sen}^2\hat{\alpha} + \cos^2\hat{\alpha} = 1}$$

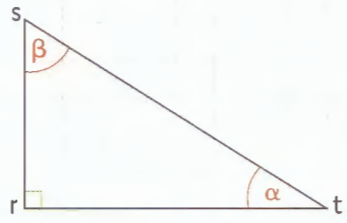


# Relaciones entre las razones trigonométricas

PARADA PRÁCTICA 55

## VERIFICACIÓN 55

● **Completen el siguiente cuadro.**




| | $\frac{\overline{rt}}{\overline{st}}$ | $\frac{\overline{st}}{\overline{rs}}$ | $\frac{\overline{rt}}{\overline{sr}}$ |
|---|---|---|---|
| 1) Función de $\hat{\beta}$ | | | |
| 2) Función de $\hat{\alpha}$ | | | |

## APLICACIÓN 55

### Ejercicio 55.1

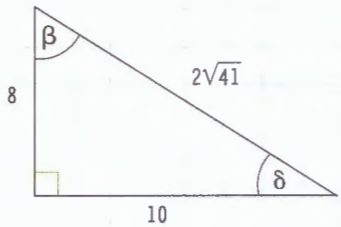
● **Hallen la razón trigonométrica y, con la calculadora, el ángulo correspondiente.**

1) $\operatorname{ctg} \hat{\beta} =$ $\Rightarrow$ $\hat{\beta} \cong$

2) $\sec \hat{\beta} =$ $\Rightarrow$ $\hat{\beta} \cong$

3) $\operatorname{cosec} \hat{\delta} =$ $\Rightarrow$ $\hat{\delta} \cong$

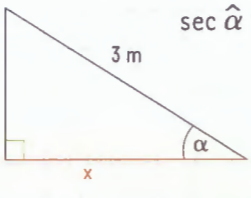
4) $\sec \hat{\delta} =$ $\Rightarrow$ $\hat{\delta} \cong$



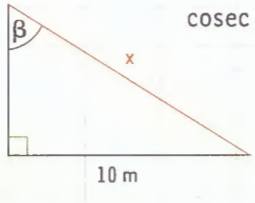

### Ejercicio 55.2

● **Calculen el valor de x en cada uno de los siguientes triángulos.**

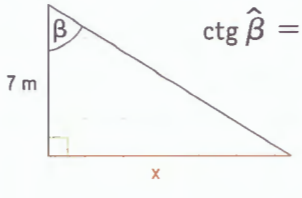
1) $\sec \hat{\alpha} = 1{,}252$



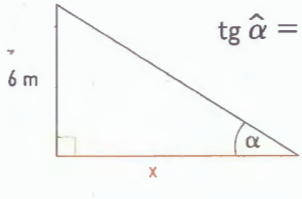

3) $\operatorname{cosec} \hat{\beta} = 1{,}079$




2) $\operatorname{ctg} \hat{\beta} = 0{,}675$




4) $\operatorname{tg} \hat{\alpha} = 1{,}963$



PARADA TEÓRICA 56

# Identidades trigonométricas

*Las identidades trigonométricas son igualdades en las cuales aparecen razones trigonométricas y resultan verdaderas para cualquier valor de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo.*

Para demostrar o resolver una identidad trigonométrica se desarrollan uno o ambos miembros de la misma, tratando de obtener expresiones equivalentes. Para ello se utilizan las relaciones que se establecen entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo.

**a)** $1 + \text{tg}^2\,\hat{\alpha} = \sec^2\hat{\alpha}$

$$1 + \frac{\text{sen}^2\,\hat{\alpha}}{\cos^2\hat{\alpha}} = \sec^2\hat{\alpha}$$

$$\frac{\cos^2\hat{\alpha} + \text{sen}^2\,\hat{\alpha}}{\cos^2\hat{\alpha}} = \sec^2\hat{\alpha}$$

$$\frac{1}{\cos^2\hat{\alpha}} = \sec^2\hat{\alpha}$$

$$\sec^2\hat{\alpha} = \sec^2\hat{\alpha}$$

**b)** $1 + \text{ctg}^2\,\hat{\beta} = \text{cosec}^2\,\hat{\beta}$

$$1 + \frac{\cos^2\hat{\beta}}{\text{sen}^2\,\hat{\beta}} = \text{cosec}^2\,\hat{\beta}$$

$$\frac{\text{sen}^2\,\hat{\beta} + \cos^2\hat{\beta}}{\text{sen}^2\,\hat{\beta}} = \text{cosec}^2\,\hat{\beta}$$

$$\frac{1}{\text{sen}^2\,\hat{\beta}} = \text{cosec}^2\,\hat{\beta}$$

$$\text{cosec}^2\,\hat{\beta} = \text{cosec}^2\,\hat{\beta}$$

**c)** $(\text{sen}\,\hat{\delta} + 1)(\text{sen}\hat{\delta} - 1) = -\cos^2\hat{\delta}$

$$\text{sen}^2\,\hat{\delta} - 1 = -\cos^2\hat{\delta}$$

$$\text{sen}^2\,\hat{\delta} - (\text{sen}^2\,\hat{\delta} + \cos^2\hat{\delta}) = -\cos^2\hat{\delta}$$

$$\text{sen}^2\,\hat{\delta} - \text{sen}^2\,\hat{\delta} - \cos^2\hat{\delta} = -\cos^2\hat{\delta}$$

$$-\cos^2\hat{\delta} = -\cos^2\hat{\delta}$$

**d)** $\text{cosec}\,\hat{\omega}.\text{tg}\,\hat{\omega} = \sec\hat{\omega}$

$$\frac{1}{\text{sen}\,\hat{\omega}} \cdot \frac{\text{sen}\,\hat{\omega}}{\cos\hat{\omega}} = \sec\hat{\omega}$$

$$\frac{1}{\cos\hat{\omega}} = \sec\hat{\omega}$$

$$\sec\hat{\omega} = \sec\hat{\omega}$$

**e)** $(\text{sen}\,\hat{\gamma} + \cos\hat{\gamma})^2 = 2\text{tg}\,\hat{\gamma}.\cos^2\hat{\gamma} + 1$

$$\text{sen}^2\,\hat{\gamma} + 2\text{sen}\,\hat{\gamma}.\cos\hat{\gamma} + \cos^2\hat{\gamma} = 2\frac{\text{sen}\,\hat{\gamma}}{\cos\hat{\gamma}} \cdot \cos^2\hat{\gamma} + 1$$

$$1 + 2\text{sen}\,\hat{\gamma}.\cos\hat{\gamma} = 2\text{sen}\,\hat{\gamma}.\cos\hat{\gamma} + 1$$

# Identidades trigonométricas

PARADA PRÁCTICA 56

## VERIFICACIÓN 56

- **Marquen con una X las expresiones que resultan identidades trigonométricas.**

1) $\cos^2 \hat{\alpha} = 1 - \text{sen}^2 \hat{\alpha}$ ☐

2) $\text{sen}\, \hat{\alpha} + \cos \hat{\alpha} = \text{tg}\, \hat{\alpha}$ ☐

3) $\text{tg}\, \hat{\alpha}.\text{ctg}\, \hat{\alpha} = 1$ ☐

4) $\text{sen}\, \hat{\alpha} = 1 - \text{cosec}\, \hat{\alpha}$ ☐

5) $\cos \hat{\alpha} = (\sec \hat{\alpha})^{-1}$ ☐

6) $\text{sen}\, \hat{\alpha} + \cos \hat{\alpha} = 1$ ☐

## APLICACIÓN 56

### Ejercicio 56.1

- **Resuelvan las siguientes identidades trigonométricas.**

1) $\dfrac{1}{\text{sen}\, \hat{\alpha}.\cos \hat{\alpha}} - \dfrac{\cos \hat{\alpha}}{\text{sen}\, \hat{\alpha}} = \text{tg}\, \hat{\alpha}$

2) $\dfrac{\text{sen}\, \hat{\varepsilon} + \cos \hat{\varepsilon}}{\text{cosec}\, \hat{\varepsilon} + \sec \hat{\varepsilon}} = \dfrac{\text{sen}\, \hat{\varepsilon}}{\sec \hat{\varepsilon}}$

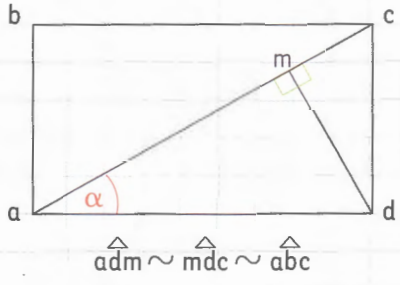
3) $\dfrac{\sec \hat{\pi} + \text{tg}\, \hat{\pi}}{\cos \hat{\pi} + \text{ctg}\, \hat{\pi}} = \sec \hat{\pi}.\text{tg}\, \hat{\pi}$

# TRAMO H: ejercitación final

**INTEGRACIÓN H**

## Ejercicio H.1

- **Completen el siguiente cuadro.**



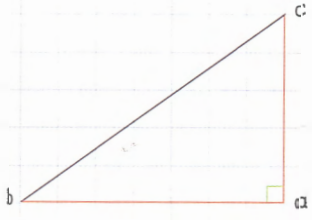

$\triangle adm \sim \triangle mdc \sim \triangle abc$

| | | $\triangle amd$ | $\triangle mdc$ | $\triangle abc$ |
|---|---|---|---|---|
| 1) | sen $\hat{\alpha}$ | | | |
| 2) | cos $\hat{\alpha}$ | | | |
| 3) | tg $\hat{\alpha}$ | | | |
| 4) | ctg $\hat{\alpha}$ | | | |
| 5) | sec $\hat{\alpha}$ | | | |
| 6) | cosec $\hat{\alpha}$ | | | |

## Ejercicio H.2

- **Resuelvan el siguiente triángulo rectángulo.**

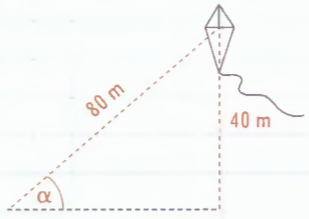
$$\begin{cases} \overline{ac} = 5{,}4 \text{ cm} \\ \overline{ab} = 7{,}8 \text{ cm} \end{cases}$$



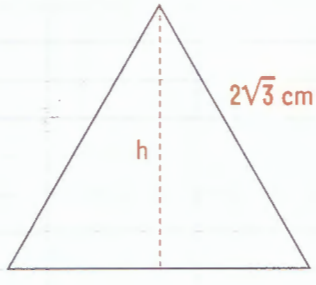
## Ejercicio H.3

**● Planteen y resuelvan los siguientes problemas.**

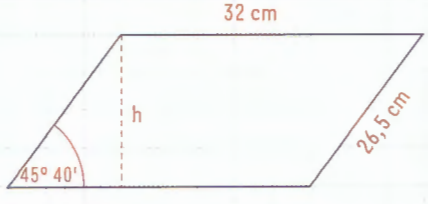
**1)** Un barrilete se encuentra a 40 m de altura y su cuerda tiene una longitud de 80 m. ¿Cuál es el ángulo que forma la cuerda con el piso?



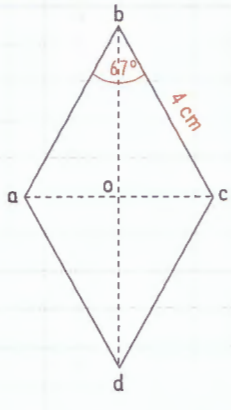

**2)** ¿Cuál es el área de un triángulo equilátero cuyos lados miden $2\sqrt{3}$ cm?




**3)** ¿Cuál es el área de un paralelogramo cuyos lados miden 26,5 cm y 32 cm, si el ángulo entre ambos es de 45° 40′?




**4)** ¿Cuál es el área de un rombo de 4 cm de lado y un ángulo interior de 67°?



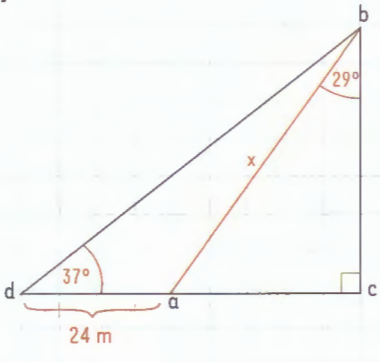
# TRAMO H: ejercitación final

## Ejercicio H.4

- **Calculen el valor de x en cada una de las siguientes figuras.**

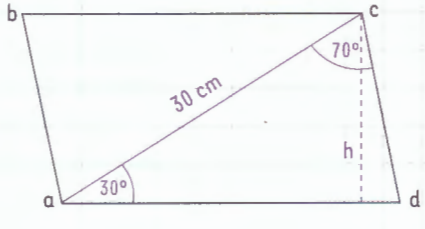
1)

2)




## Ejercicio H.5

- **Calculen el perímetro y el área del siguiente paralelogramo.**



## Ejercicio H.6

● **Verifiquen las siguientes identidades trigonométricas.**

**1)** $\dfrac{1 + \cos \hat{\alpha}}{\operatorname{sen} \hat{\alpha}} + \operatorname{tg} \hat{\alpha} = \dfrac{1 + \cos \hat{\alpha}}{\operatorname{sen} \hat{\alpha}.\cos \hat{\alpha}}$

**2)** $\dfrac{1 + \operatorname{tg} \hat{\beta}}{1 + \operatorname{ctg} \hat{\beta}} = \operatorname{tg} \hat{\beta}$

**3)** $\cos \hat{\alpha}(\operatorname{tg} \hat{\alpha} + 1) - \cos \hat{\alpha} = \operatorname{sen} \hat{\alpha}$

**4)** $\dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 \hat{\beta}}(1 - \operatorname{sen}^2 \hat{\beta})} + \operatorname{tg}^2 \hat{\beta} = \sec^2 \hat{\beta}$

**5)** $(\sec^2 \hat{\lambda} - 1).\operatorname{cosec}^2 \hat{\lambda}.\operatorname{ctg} \hat{\lambda} = \dfrac{1}{\cos \hat{\lambda}.\operatorname{sen} \hat{\lambda}}$

**6)** $(\operatorname{sen} \hat{\theta} + \cos \hat{\theta})^2 - \operatorname{tg} \hat{\theta}.\cos^2 \hat{\theta} = 1 + \operatorname{sen} \hat{\theta}.\cos \hat{\theta}$

# FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

TRAMO

I


57. La circunferencia trigonométrica.
58. Funciones trigonométricas de un mismo ángulo.
59. Amplitud, período y ángulo de fase.
60. Funciones trigonométricas inversas.
61. Ecuaciones trigonométricas.


**MATEMÁTICA INSTRUMENTAL**
**Con conexión a:**


13 **FÍSICA,** página 26.

14 **FÍSICA,** página 28.

PARADA TEÓRICA 57

# La circunferencia trigonométrica

*Se denomina **circunferencia trigonométrica** a una circunferencia de radio 1 con centro en el origen de coordenadas.*

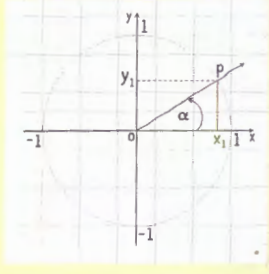
La rotación de la semirrecta $\overrightarrow{op}$, con centro en el punto $(0;0)$ y ángulo de giro $\hat{\alpha}$, corta a la circunferencia en un punto $P = (x_1;y_1)$ y determina un triángulo rectángulo $o\hat{x}_1p$.

*Razones trigonométricas* — *Funciones definidas en la circunferencia trigonométrica*

$$\operatorname{sen}\hat{\alpha} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} \longrightarrow \operatorname{sen}\hat{\alpha} = \frac{y_1}{op} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{\alpha} = y_1$$

$$\cos\hat{\alpha} = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} \longrightarrow \cos\hat{\alpha} = \frac{x_1}{op} \Rightarrow \cos\hat{\alpha} = x_1$$

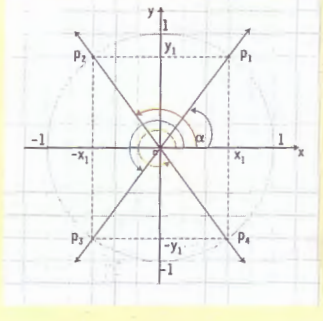
$$\operatorname{tg}\hat{\alpha} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} \longrightarrow \operatorname{tg}\hat{\alpha} = \frac{y_1}{x_1}$$




## Positividad y negatividad de las funciones trigonométricas

Para determinar el signo de las funciones trigonométricas se debe conocer a qué cuadrante pertenecen el ángulo y los signos de las coordenadas del punto $P = (x;y)$.

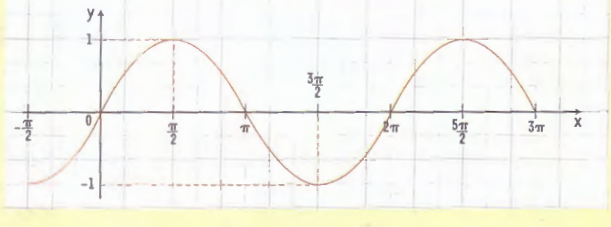
| Cuadrante | sen $\hat{\alpha}$ | cos $\hat{\alpha}$ | tg $\hat{\alpha}$ |
|---|---|---|---|
| I | + | + | + |
| II | + | − | − |
| III | − | − | + |
| IV | − | + | − |




## Representación gráfica de las funciones trigonométricas

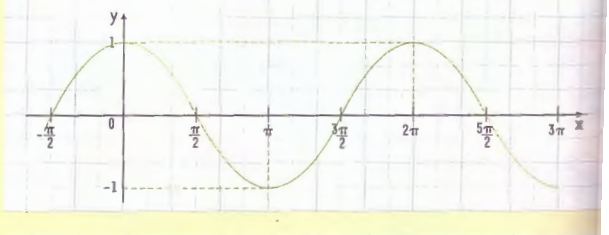
**1)** $f(x) = \mathbf{sen\ x}$

Dominio: $\mathbb{R}$ ∧ Codominio: $[-1;1]$




**2)** $f(x) = \mathbf{cos\ x}$

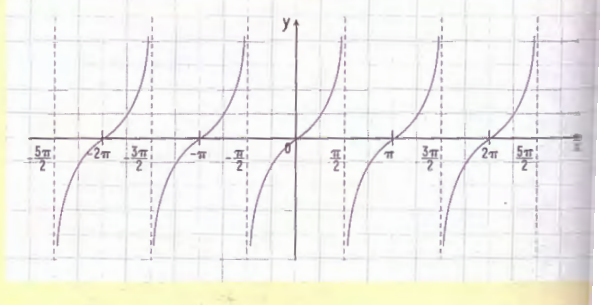
Dominio: $\mathbb{R}$ ∧ Codominio: $[-1;1]$




**3)** $f(x) = \mathbf{tg\ x}$

Dominio: $\mathbb{R} - \left\{x/x = \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}\right\}$

Codominio: $\mathbb{R}$



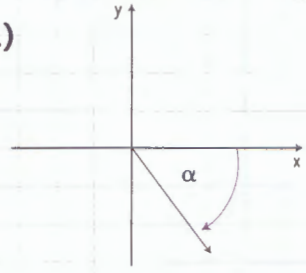
# La circunferencia trigonométrica

PARADA PRÁCTICA 57

## VERIFICACIÓN 57

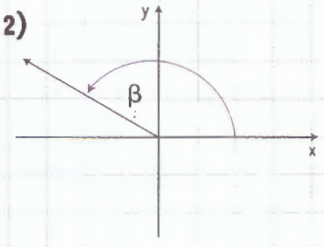
● **Completen con $>$ o $<$ según corresponda en cada caso.**

**1)**



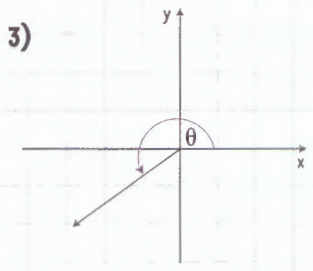

**a)** sen $\hat{\alpha}$ 0
**b)** cos $\hat{\alpha}$ 0
**c)** tg $\hat{\alpha}$ 0

**2)**




**a)** sen $\hat{\beta}$ 0
**b)** cos $\hat{\beta}$ 0
**c)** tg $\hat{\beta}$ 0

**3)**




**a)** sen $\hat{\theta}$ 0
**b)** cos $\hat{\theta}$ 0
**c)** tg $\hat{\theta}$ 0

## APLICACIÓN 57

### Ejercicio 57.1

● **Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda.**

**1)** Si el coseno de un ángulo es negativo, el ángulo pertenece al tercer o cuarto cuadrante. ___

**2)** Si el coseno de un ángulo es negativo y el seno del mismo ángulo es positivo, el ángulo pertenece al segundo cuadrante. ___

**3)** Si la tangente de un ángulo es positiva, se puede asegurar que dicho ángulo pertenece al primer cuadrante. ___

**4)** Si un ángulo pertenece al tercer cuadrante, el seno de dicho ángulo es positivo. ___

**5)** Si el seno de un ángulo es positivo y la tangente es positiva, el ángulo pertenece al primer cuadrante. ___

### Ejercicio 57.2

● **Calculen el valor de las restantes funciones teniendo en cuenta los siguientes datos.**

**1)** $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ y $x \in$ I cuadrante

**2)** $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ y $x \in$ III cuadrante

**3)** $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ y $x \in$ II cuadrante

**4)** $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $x \in$ IV cuadrante

PARADA TEÓRICA

58

# Funciones trigonométricas de un mismo ángulo

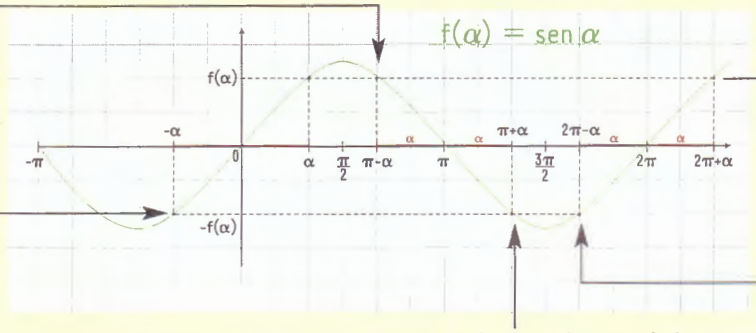
Ángulos

- $\hat{\alpha} \wedge -\hat{\alpha}$ → Opuestos
- $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \pi \Rightarrow \hat{\alpha} = \pi - \hat{\beta}$ → Suplementarios
- $\hat{\alpha} - \hat{\beta} = \pi \Rightarrow \hat{\alpha} = \pi + \hat{\beta}$ → Difieren en $\pi$
- $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 2\pi \Rightarrow \hat{\alpha} = 2\pi - \hat{\beta}$ → Suman $2\pi$
- $\hat{\alpha} - \hat{\beta} = 2\pi \Rightarrow \hat{\alpha} = 2\pi + \hat{\beta}$ → Difieren en $2\pi$

**1)** $f(x) =$ **sen x**

$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = f(\alpha)$
$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)$

$\operatorname{sen}(2\pi + \alpha) = f(\alpha)$
$\operatorname{sen}(2\pi + \alpha) = \operatorname{sen}$




$\operatorname{sen}(-\alpha) = -f(\alpha)$
$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

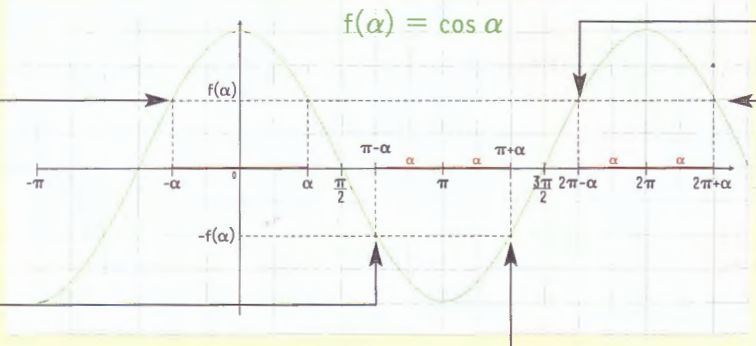
$\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -f(\alpha)$
$\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{sen}$

$\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -f(\alpha)$
$\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$

**2)** $f(x) =$ **cos x**

$\cos(-\alpha) = f(\alpha)$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\cos(2\pi - \alpha) = f(\alpha)$
$\cos(2\pi - \alpha) = \cos$




$\cos(\pi - \alpha) = -f(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$

$\cos(2\pi + \alpha) = f(\alpha)$
$\cos(2\pi + \alpha) = \cos$

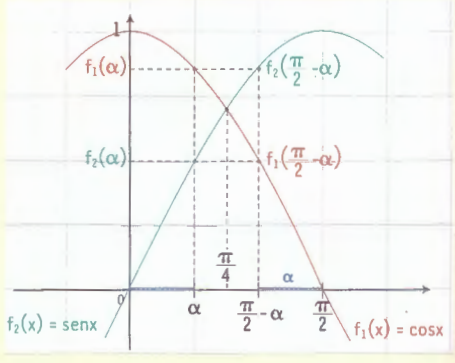
$\cos(\pi + \alpha) = -f(\alpha)$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$

## Ángulos complementarios

$$\underbrace{\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \hat{\beta} = \frac{\pi}{2} - \hat{\alpha}}_{\text{Ángulos complementarios}}$$

$$f_1\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = f_2(\alpha) \qquad f_2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = f_1(\alpha)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$



# Funciones trigonométricas de un mismo ángulo

PARADA PRÁCTICA 58

## VERIFICACIÓN 58

- **Deduzcan, a partir de $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$, las siguientes relaciones.**

**1)** $\text{tg}(-\alpha) =$

**2)** $\text{tg}(\pi - \alpha) =$

**3)** $\text{tg}(\pi + \alpha) =$

**4)** $\text{tg}(2\pi - \alpha) =$

**5)** $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$

## APLICACIÓN 58

### Ejercicio 58.1

- **Unan con una flecha las expresiones equivalentes.**

**1)** $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right)$

**2)** $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{5}\right)$

**3)** $\cos\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right)$

**4)** $\text{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)$

**5)** $\text{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right)$

**6)** $\text{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)$

**a)** $-\cos\frac{\pi}{5}$

**b)** $\text{sen}\frac{\pi}{5}$

**c)** $-\text{sen}\frac{\pi}{5}$

**d)** $-\text{tg}\frac{\pi}{5}$

**e)** $\cos\frac{\pi}{5}$

**f)** $\text{tg}\frac{\pi}{5}$

### Ejercicio 58.2

- **Expresen como una única función.**

**1)** $\text{sen}(\pi - x).\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

**2)** $\frac{\text{sen}(\pi + x)}{\cos(-x)}$

**3)** $\frac{\text{tg}^2(\pi - x)}{\text{tg}(\pi - x)}$

# Funciones trigonométricas de un mismo ángulo

## Ejercicio 58.3

- **Simplifiquen las siguientes expresiones.**

**1)** $\cos(-x).\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \text{sen}(\pi + x).\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

**2)** $\text{sen}^3(\pi + x) - \cos^3\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

**3)** $\frac{\text{sen}(\pi + x) - 2\text{sen}(-x)}{4\cos(\pi + x) + \cos(2\pi - x)}$

**4)** $\frac{\cos(\pi - x).\cos(\pi + x)}{2\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$

## Ejercicio 58.4

- **Completen la siguiente tabla.**

| | | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1)** | $f(x) = \text{sen } x$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | | | | | | | | | |
| **2)** | $f(x) = \cos x$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | | | | | | | | | |
| **3)** | $f(x) = \text{tg } x$ | | | | | | | | | | | | |

## Ejercicio 58.5

● **Expresen como una función de un ángulo del primer cuadrante.**

**1)** $\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

**2)** $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

**3)** $\operatorname{sen}\frac{11\pi}{4}$

**4)** $\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$

**5)** $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

**6)** $\operatorname{sen}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

## Ejercicio 58.6

● **Calculen el valor exacto de x.**

**1)** $x = \dfrac{\cos\frac{5\pi}{6}}{\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)} - \dfrac{\cos\frac{11\pi}{6}}{\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$

**2)** $x = \operatorname{tg}^2\frac{5\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\frac{4\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}$

**3)** $x = \operatorname{sen}^3\frac{11\pi}{6} : \left(\cos^2\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}^2\frac{5\pi}{3}\right)$

**4)** $x = \dfrac{2\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \cos^3\frac{7\pi}{6}\right]}{\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{3}\right)}$

## Ejercicio 58.7

● **Marquen con una X la opción correcta.**

**1)** $f(x) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, entonces $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ es igual a: **a)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ **b)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ **c)** $\frac{1}{4}$ ☐ **d)** $\frac{1}{2}$ ☐

**2)** $f(x) = -2\operatorname{tg}(-\pi - x)$, entonces $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ es igual a: **a)** $-2\frac{\sqrt{3}}{3}$ ☐ **b)** $2\frac{\sqrt{3}}{3}$ ☐ **c)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ☐ **d)** $-\sqrt{3}$ ☐

**3)** $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, entonces $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ es igual a: **a)** $-\sqrt{3}$ ☐ **b)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ☐ **c)** $\sqrt{3}$ ☐ **d)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ☐

PARADA TEÓRICA

# 59 Amplitud, período y ángulo de fase

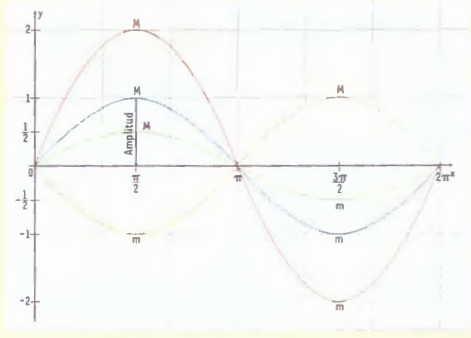
$$f(x) = A\,\text{sen}(Bx - C) + D$$

- **A**: modifica la amplitud de la onda.
- **B**: modifica el período.
- **C**: desplaza la función con respecto al eje x.
- **D**: desplaza la función con respecto al eje y.

## Amplitud

$|A|$: indica la amplitud de la función y es la semidistancia entre el máximo (M) y el mínimo (m) de la función.

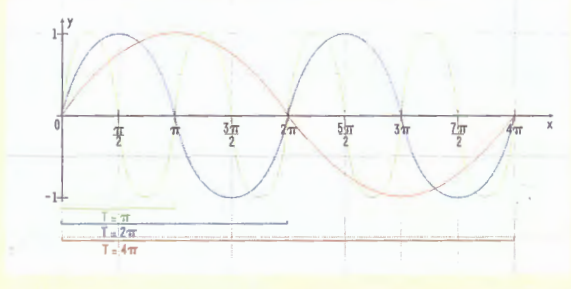
| | A | Conjunto imagen |
|---|---|---|
| $f(x) = \text{sen } x$ | 1 | $[-1;1]$ |
| $f_1(x) = 2\text{sen } x$ | 2 | $[-2;2]$ |
| $f_2(x) = -\text{sen } x$ | -1 | $[-1;1]$ |
| $f_3(x) = \frac{1}{2}\text{sen } x$ | $\frac{1}{2}$ | $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ |




## Período

**B**: modifica el período (duración de un ciclo) de la función sin modificar su amplitud.

| | B | Período: $T = \frac{2\pi}{\lvert B\rvert}$ |
|---|---|---|
| $f(x) = \text{sen } x$ | 1 | $2\pi$ |
| $f_1(x) = \text{sen}(2x)$ | 2 | $\pi$ |
| $f_2(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ | $\frac{1}{2}$ | $4\pi$ |




## Ángulo de fase

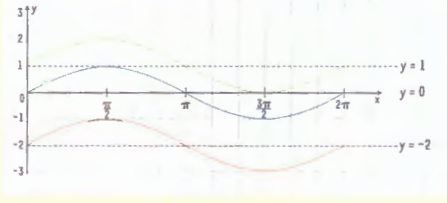
$\frac{C}{B}$: desplaza la función con respecto al eje x; si es positivo, hacia la derecha y si es negativo, hacia la izquierda.

| | $\frac{C}{B}$ | Ángulo de fase |
|---|---|---|
| $f(x) = \text{sen } x$ | 0 | 0 (no se desplaza) |
| $f_1(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{4}$ hacia la **derecha** |
| $f_2(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{4}$ hacia la **izquierda** |

## Desplazamiento respecto del eje y

**D**: desplaza la función respecto del eje y; si es positivo, hacia arriba y si es negativo, hacia abajo.

| | D | Desplazamiento |
|---|---|---|
| $f(x) = \text{sen } x$ | 0 | 0 (no se desplaza) |
| $f_1(x) = \text{sen } x + 1$ | 1 | 1 unidad hacia arriba |
| $f_2(x) = \text{sen } x - 2$ | -2 | 2 unidades hacia abajo |



# Amplitud, período y ángulo de fase

PARADA PRÁCTICA 59

## VERIFICACIÓN 59

● **Unan con una flecha cada función con su correspondiente período.**

**1)** $f_1(x) = \text{sen}(-3x)$

**2)** $f_2(x) = \text{sen}(4x)$

**3)** $f_3(x) = -4\text{sen}\,x$

**4)** $f_4(x) = 2\text{sen}\left(\frac{1}{4}x\right)$

**5)** $f_5(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{4}\right)$

**a)** $8\pi$

**b)** $\frac{\pi}{2}$

**c)** $\frac{\pi}{6}$

**d)** $\frac{2\pi}{3}$

**e)** $2\pi$

**f)** $6\pi$

## APLICACIÓN 59

### Ejercicio 59.1

● **Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda en cada caso.**

A partir de $f(x) = \text{sen}\,x$, la función:

**1)** $f(x) = \text{sen}\,x + 4$, está desplazada 4 unidades con respecto al eje x. ☐

**2)** $f(x) = \text{sen}(x + 4\pi)$, está desplazada $4\pi$ hacia la derecha. ☐

**3)** $f(x) = \text{sen}(4x + \pi)$, tiene por ángulo de fase a $\pi$. ☐

**4)** $f(x) = \text{sen}(x - 2\pi)$, está desplazada $2\pi$ hacia la derecha. ☐

**5)** $f(x) = \text{sen}(2x + 2\pi)$, está desplazada $\pi$ hacia la izquierda. ☐

### Ejercicio 59.2

● **Completen el siguiente cuadro.**

| | Función | Amplitud | Período | Ángulo de fase |
|---|---|---|---|---|
| **1)** | $f_1(x) = -2\text{sen}(3x - \pi)$ | | | |
| **2)** | $f_2(x) = \frac{3}{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$ | | | |
| **3)** | $f_3(x) = -\text{sen}(4x - \pi) + 2$ | | | |
| **4)** | $f_4(x) = 4\text{sen}(2x) - 3$ | | | |
| **5)** | $f_5(x) = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$ | | | |
| **6)** | $f_6(x) = 2 + \cos(-\pi + x)$ | | | |

# Amplitud, período y ángulo de fase

## Ejercicio 59.3

Dadas las siguientes funciones:

$f_1(x) = 2\cos(2x)$

$f_2(x) = \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

$f_3(x) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

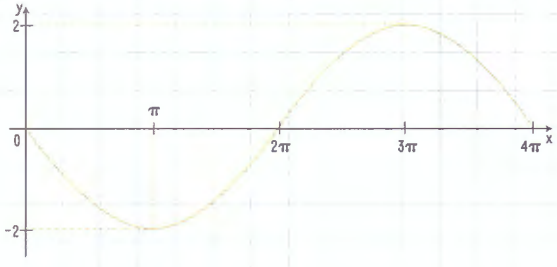
$f_4(x) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

$f_5(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

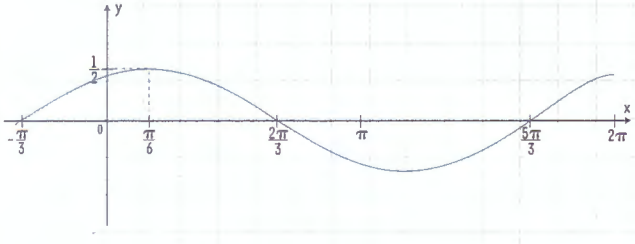
$f_6(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

- **Escriban debajo de cada gráfico la fórmula de la función correspondiente.**

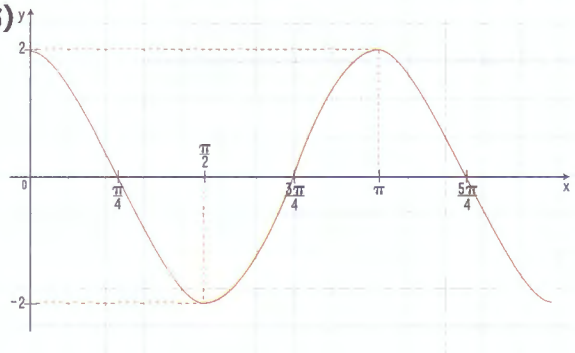
**1)**



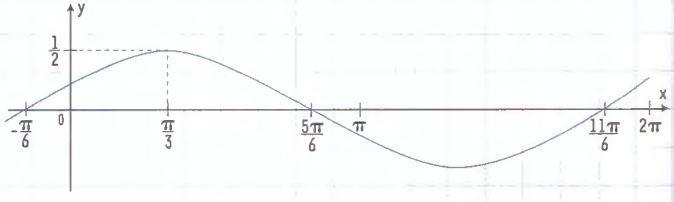

**2)**



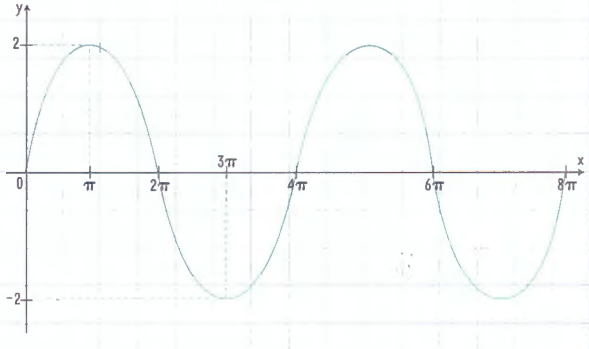

**3)**



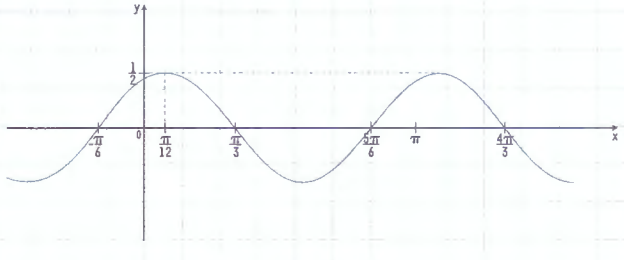

**4)**




**5)**



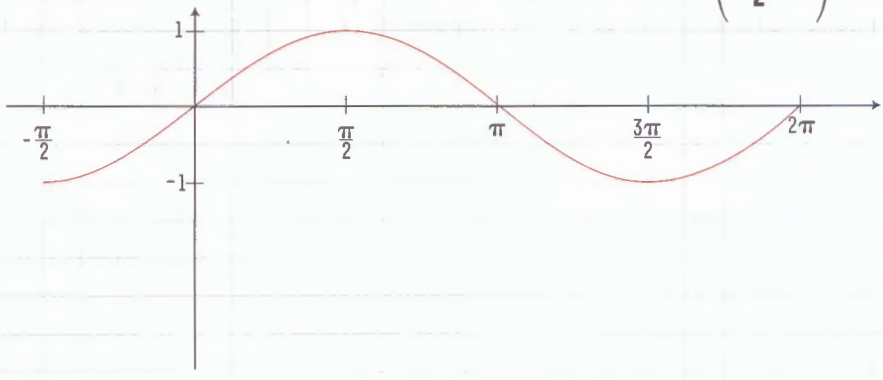

**6)**



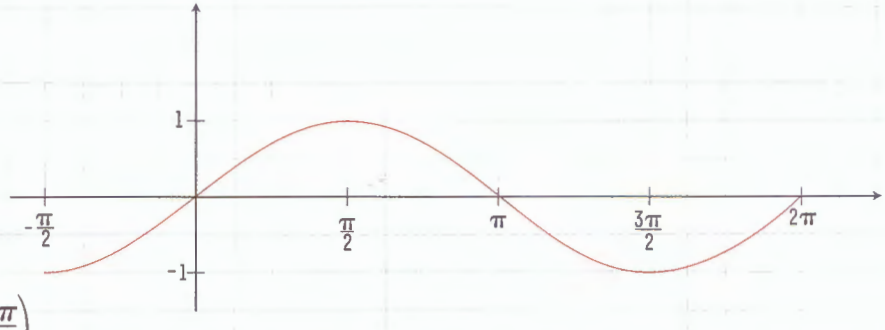
## Ejercicio 59.4

● **Grafiquen, a partir de $f(x) = \text{sen } x$, cada una de las siguientes funciones en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.**

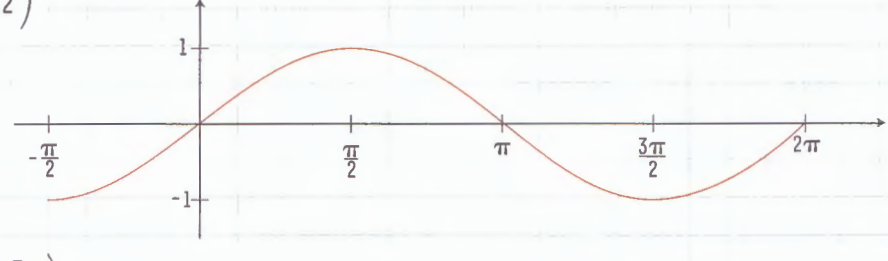
**1)** $f_1(x) = \text{sen } x - 2$



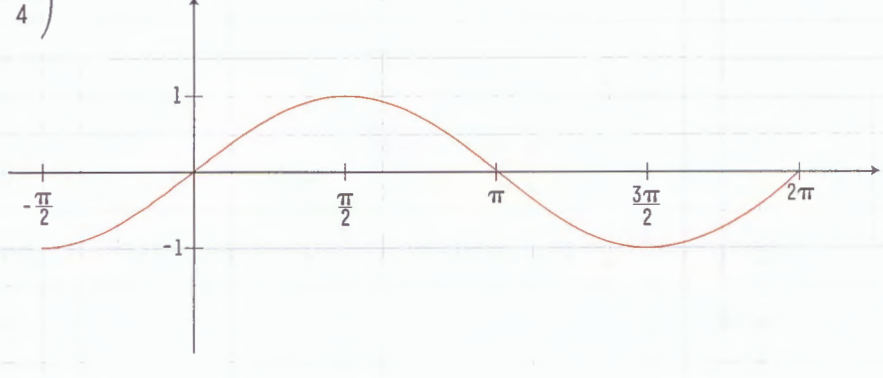

**2)** $f_2(x) = -\text{sen } x + 1$



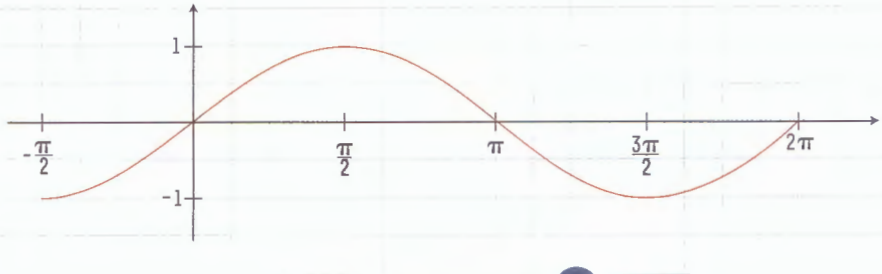

**3)** $f_3(x) = \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$




**4)** $f_4(x) = -2\text{sen}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$



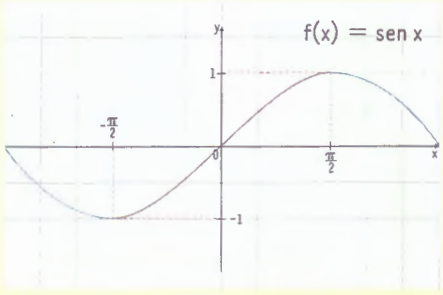

**5)** $f_5(x) = \frac{1}{2}\text{sen}\left(\frac{4}{3}x\right)$

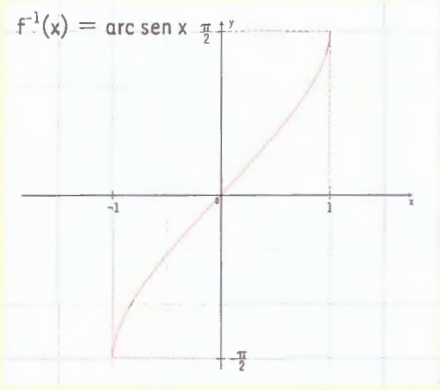


PARADA TEÓRICA 60

# Funciones trigonométricas inversas

Para hallar la función inversa, $f^{-1}(x)$, hay que restringir $f(x)$ para que sea biyectiva.




$\mathbf{f(x) = \text{sen } x} \wedge f: \underbrace{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}_{\text{Dominio}} \rightarrow \underbrace{[-1;1]}_{\text{Imagen}}$

$\mathbf{f^{-1}(x) = \text{arc sen } x} \wedge f^{-1}: [-1;1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Sea $f(x) = \text{sen } x \wedge f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, para hallar el valor de x se debe utilizar la función $f^{-1}(x) = \text{arc sen } x$.

$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \text{arc sen } \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 45° = \frac{\pi}{4}$

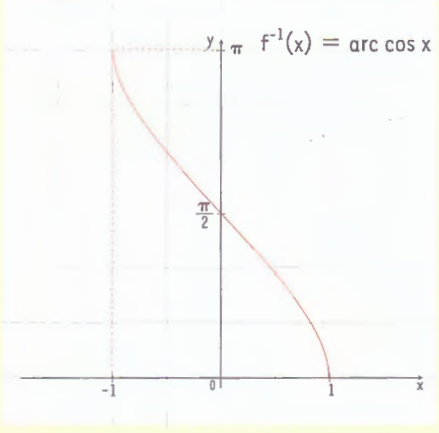
De manera análoga se restringe el dominio de las funciones coseno y tangente.

**$f(x) = \cos x \Rightarrow f^{-1}(x) = \text{arc cos } x$**

$f^{-1}: [-1;1] \rightarrow [0;\pi]$

Sea $f(x) = \cos x \wedge f(x) = \frac{1}{2}$, para hallar el valor de x se debe utilizar la función $f^{-1}(x) = \text{arc cos } x$.

$f(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \text{arc cos } \frac{1}{2} \Rightarrow x = 60° = \frac{\pi}{3}$

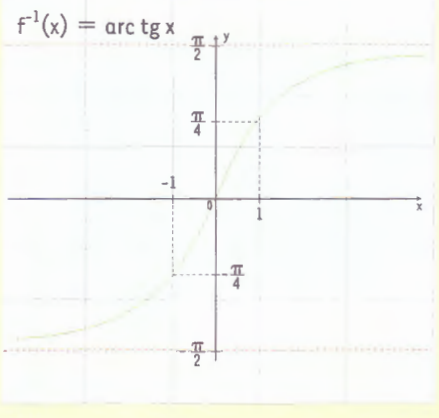



**$f(x) = \text{tg } x \Rightarrow f^{-1}(x) = \text{arc tg } x$**

$f^{-1}: R \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Sea $f(x) = \text{tg } x \wedge f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, para hallar el valor de x se debe utilizar la función $f^{-1}(x) = \text{arc tg } x$.

$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \text{arc tg } \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 30° = \frac{\pi}{6}$



# Funciones trigonométricas inversas

PARADA PRÁCTICA 60

## VERIFICACIÓN 60

● **Calculen, utilizando la calculadora, el valor del ángulo x en el sistema sexagesimal.**

**1)** $\operatorname{sen} x = \frac{3}{4}$ **3)** $\cos x = \frac{1}{5}$ **5)** $\operatorname{tg} x = 2{,}5$

**2)** $\operatorname{sen} x = -0{,}7$ **4)** $\cos x = -\frac{5}{6}$ **6)** $\operatorname{tg} x = -\sqrt{5}$

ESCUELA MEDIA Nº 13
BIBLIOTECA

## APLICACIÓN 60

### Ejercicio 60.1

● **Marquen con una X la opción correcta.**

**1)** $\hat{\alpha} = \operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\hat{\alpha} \in$ III cuadrante, entonces:

**a)** $\hat{\alpha} = \frac{5\pi}{6}$ ☐ **b)** $\hat{\alpha} = \frac{7\pi}{6}$ ☐ **c)** $\hat{\alpha} = \frac{5\pi}{3}$ ☐ **d)** $\hat{\alpha} = \frac{4\pi}{3}$ ☐

**2)** $\hat{\beta} = \operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3})$ y $\hat{\beta} \in$ II cuadrante, entonces:

**a)** $\hat{\beta} = -\frac{\pi}{3}$ ☐ **b)** $\hat{\beta} = \frac{\pi}{3}$ ☐ **c)** $\hat{\beta} = \frac{2\pi}{3}$ ☐ **d)** $\hat{\beta} = \frac{5\pi}{3}$ ☐

**3)** $\hat{\delta} = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\hat{\delta} \in$ IV cuadrante, entonces:

**a)** $\hat{\delta} = \frac{\pi}{4}$ ☐ **b)** $\hat{\delta} = -\frac{5\pi}{4}$ ☐ **c)** $\hat{\delta} = -\frac{3\pi}{4}$ ☐ **d)** $\hat{\delta} = \frac{7\pi}{4}$ ☐

**4)** $\hat{\gamma} = \operatorname{arc\,cos}\frac{1}{2}$ y $\hat{\gamma} \in$ IV cuadrante, entonces:

**a)** $\hat{\gamma} = \frac{5\pi}{3}$ ☐ **b)** $\hat{\gamma} = -\frac{5\pi}{3}$ ☐ **c)** $\hat{\gamma} = -\frac{2\pi}{3}$ ☐ **d)** $\hat{\gamma} = \frac{2\pi}{3}$ ☐

### Ejercicio 60.2

● **Hallen los valores de $x \in [-2\pi; \pi]$ que verifiquen cada una de las siguientes condiciones.**

**1)** $\operatorname{arc\,cos} x = \frac{1}{2}$ **2)** $\operatorname{arc\,cos} x = -\frac{1}{2}$

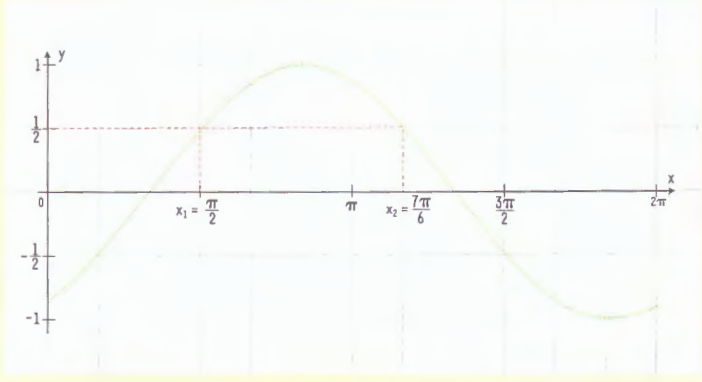
INVENTARIO 3561/02

PARADA TEÓRICA

# 61 Ecuaciones trigonométricas

Resolver una ecuación trigonométrica es encontrar, si existen, el o los valores angulares que la verifican.

**a)** Hallar $x \in [0;2\pi)$: $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$




$\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$x - \frac{\pi}{3} = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{2}\right)$

$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \vee x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$

$x_1 = \frac{\pi}{2} \vee x_2 = \frac{7\pi}{6}$

$S = \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}\right\}$

**b)** Hallar $x \in [0;2\pi)$: $2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 1$

$2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0 \rightarrow$ Se iguala a cero.

$2z^2 - z - 1 = 0 \rightarrow$ Cambio de variable: $\operatorname{sen} x = z$

$$z_{1;2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.2.(-1)}}{2.2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

**1)** $z = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 1$

$x = \operatorname{arc\,sen} 1$

$x_1 = \frac{\pi}{2}$

**2)** $z = -\frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$

$x = \operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$x_2 = \frac{7\pi}{6} \vee x_3 = \frac{11\pi}{6}$

$S = \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$

**c)** Hallar $x \in [0;2\pi)$: $2\cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow |\cos x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**1)** $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \operatorname{arc\,cos} \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x_1 = \frac{\pi}{4} \vee x_2 = \frac{7\pi}{4}$

**2)** $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$x_3 = \frac{3\pi}{4} \vee x_4 = \frac{5\pi}{4}$

$S = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$

# Ecuaciones trigonométricas

PARADA PRÁCTICA 61

## VERIFICACIÓN 61

- **Resuelvan e interpreten gráficamente $f(x) = g(x)$, para $x \in [0;2\pi)$.**

**1)** $f(x) = -2\cos x \ \wedge \ g(x) = 1$

**2)** $f(x) = 4\operatorname{sen} x \ \wedge \ g(x) = -2$

## APLICACIÓN 61

### Ejercicio 61.1

- **Resuelvan las siguientes ecuaciones, para $x \in [0;2\pi)$.**

**1)** $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

**2)** $\operatorname{sen}^2 x + \frac{7}{2}\operatorname{sen} x = 2$

**3)** $\operatorname{sen}^2 x - 7\operatorname{sen} x = 0$

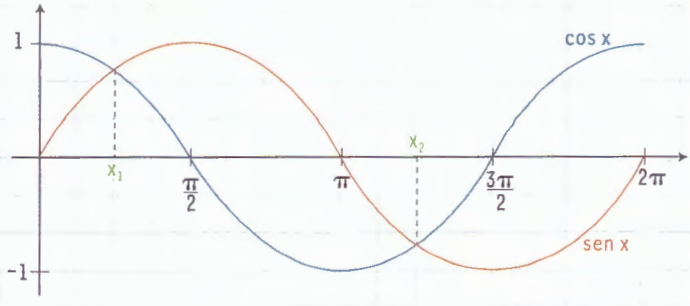
**4)** $\sqrt{3}\cos^2 x - \frac{3}{2}\cos x = 0$

# Ecuaciones trigonométricas

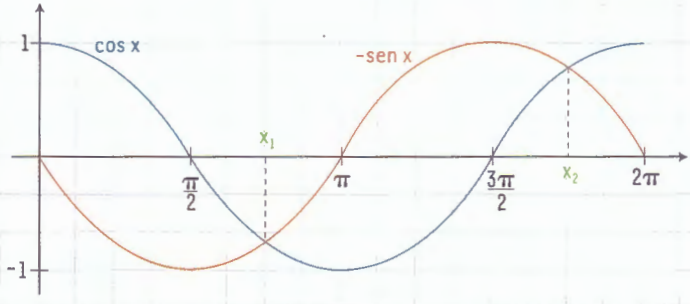
## Ejercicio 61.2

**● Hallen analíticamente las abscisas de los puntos de intersección de las siguientes funciones en el intervalo $(0;2\pi)$.**

**1)**




**2)**




## Ejercicio 61.3

**● Calculen el valor de x en cada una de las siguientes igualdades.**

**1)** $\text{sen}(x - 30°) = \cos x$

**2)** $\text{cosec}(x + 45°) = \sec(2x)$

**3)** $\text{sen}(3x - 10°) = \dfrac{1}{\sec x}$

**4)** $-\text{sen}(3x + 180°) = \cos(x + 30°)$

## Ejercicio 61.4

**● Hallen el o los valores de x, perteneciente al intervalo $(-\pi;\pi)$, que verifiquen cada una de las siguientes ecuaciones.**

**1)** $4\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right).\cos(2\pi - x) + \cos^2 x = \cos^3 x.\sec(\pi - x) + 3$

**2)** $2\text{sen}\,(\pi - x) = \cos(\pi - x).\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2$

**3)** $2 - 4\cos^2 x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).\text{sen}(2\pi + x) + \text{ctg}\,x.\text{sen}\,x.\cos(2\pi - x)$

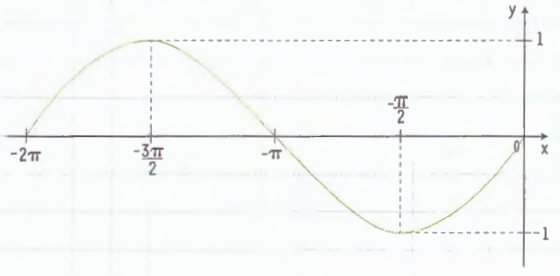
# TRAMO I: ejercitación final

INTEGRACIÓN I

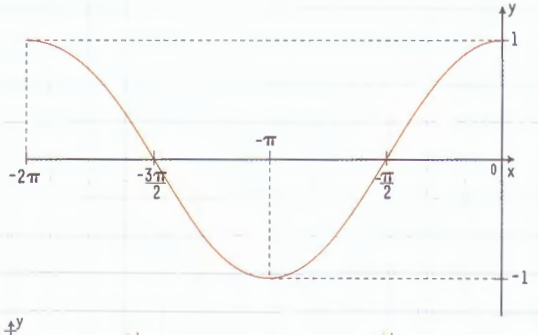
## Ejercicio I.1

● **Indiquen los conjuntos de positividad y negatividad, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones.**

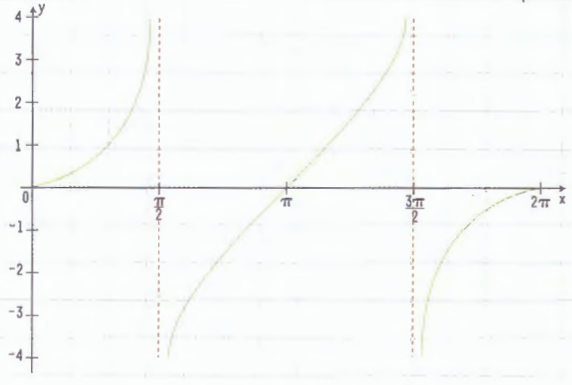
**1)** $f(x) = \operatorname{sen} x \ \wedge \ x \in [-2\pi;0]$




**2)** $f(x) = \cos x \ \wedge \ x \in [-2\pi;0]$




**3)** $f(x) = \operatorname{tg} x \ \wedge \ x \in [0;2\pi]$




## Ejercicio I.2

● **Indiquen los desplazamientos de las siguientes funciones con respecto a $f(x) = \operatorname{sen} x$.**

**1)** $f(x) = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{9}\right) + 1$

**3)** $f(x) = \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{9}\right) - 1$

**2)** $f(x) = 2\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 4$

**4)** $f(x) = -2\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 4$

## Ejercicio I.3

**● Verifiquen cada una de las siguientes identidades.**

**1)** $-\cos x = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

**2)** $\operatorname{sen}(3x - \pi) = -\operatorname{sen} 3x$

**3)** $\operatorname{sen}\left(x + \frac{5\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

**4)** $\cos\left(x + \frac{7\pi}{6}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

## Ejercicio I.4

**● Hallen la intersección de ambas funciones con el eje x, en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, y representen gráficamente dicha intersección.**

**1)** $f(x) = \cos(2x)$

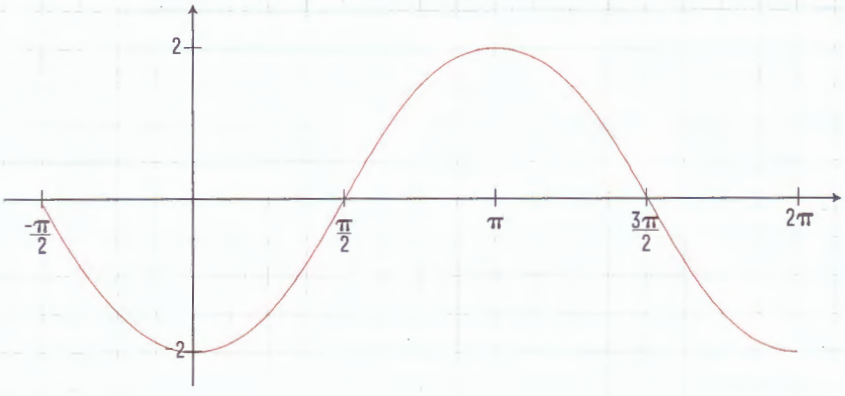
**2)** $f(x) = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$

# TRAMO I: ejercitación final

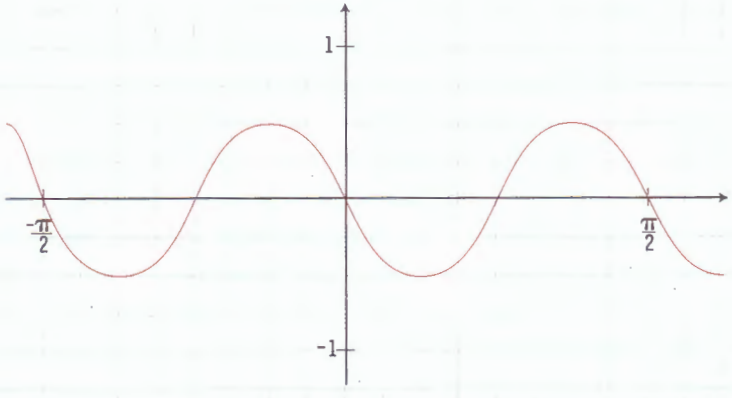
## Ejercicio I.5

**● Reconstruyan la fórmula de cada una de las siguientes funciones hallando los valores de A, B, C y D, según corresponda en cada caso.**

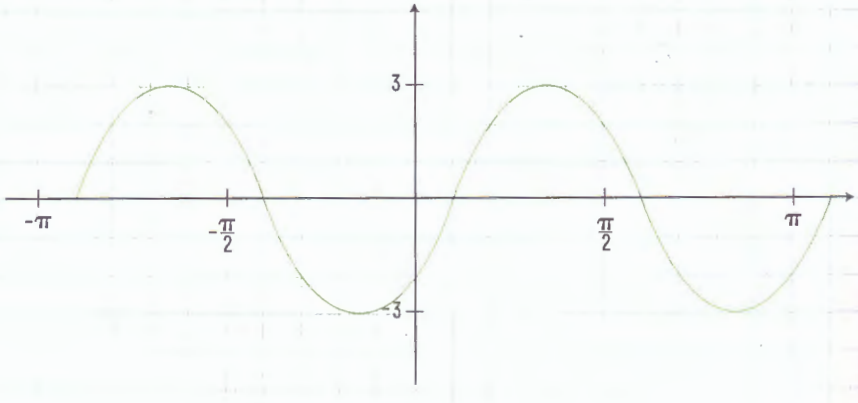
**1)** $f(x) = A\cos(Bx)$



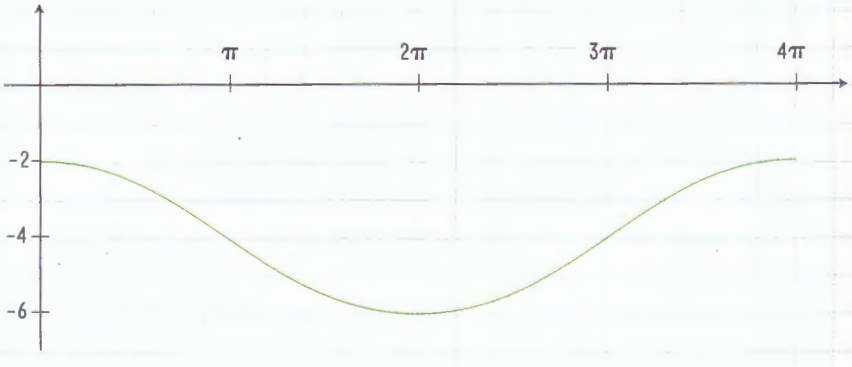

**2)** $f(x) = A\text{sen}(Bx)$




**3)** $f(x) = A\text{sen}(Bx - C)$




**4)** $f(x) = A\cos(Bx) + D$



## Ejercicio I.6

**● Resuelvan las siguientes ecuaciones para $x \in [0;2\pi)$.**

**1)** $2\cos^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$

**2)** $\operatorname{sen}(\pi - x) + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}\operatorname{sen}(-x) - \operatorname{sen}(\pi + x)$

**3)** $\cos^2 x - 7\operatorname{sen}^2 x + 3 = 0$

**4)** $2\operatorname{tg} x.\operatorname{sen} x = 3$

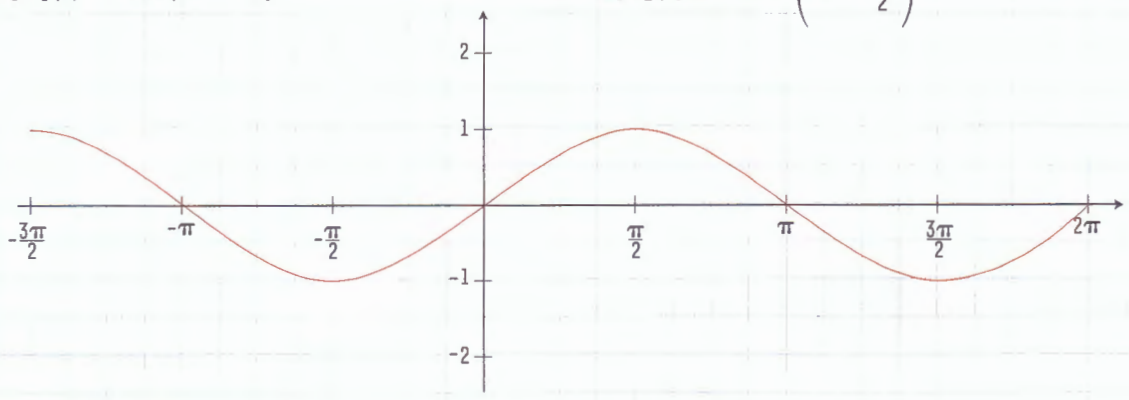
**5)** $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

# TRAMO I: ejercitación final

## Ejercicio I.7

**● Grafiquen, a partir de $f(x) = \text{sen } x$, cada una de las siguientes funciones.**

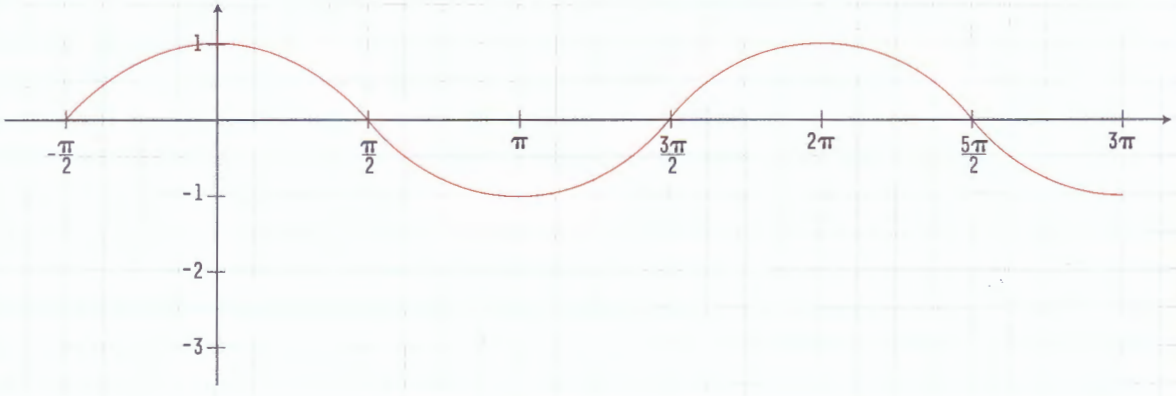
**1)** $f_1(x) = \text{sen}(2x - \pi)$ **2)** $f_2(x) = -2\text{sen}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$




## Ejercicio I.8

**● Grafiquen, a partir de $f(x) = \cos x$, cada una de las siguientes funciones.**

**1)** $f_1(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ **2)** $f_2(x) = 2\cos(2x) - 1$




## Ejercicio I.9

**● Resuelvan la siguiente ecuación e interprétenla gráficamente, para $x \in [0;2\pi)$.**

$\text{sen } x = 1 + \cos x$

# VECTORES EN EL PLANO

TRAMO

J


62. Vectores en el plano; elementos.
63. Vectores referidos al origen de coordenadas.
64. Adición y sustracción de vectores.
65. Producto de un escalar por un vector.
66. Módulo de un vector.
67. Producto escalar de dos vectores.
68. Ecuación vectorial de la recta.


**MATEMÁTICA INSTRUMENTAL**
**Con conexión a:**


15 **FÍSICA,** página 30.

PARADA TEÓRICA

# 62 Vectores en el plano; elementos

Un automóvil azul se desplaza por la avenida Scalabrini Ortiz y lo hace desde la calle Nicaragua hasta Paraguay. Otro automóvil, verde, se desplaza por la calle J. Álvarez desde Soler hasta Honduras.

El desplazamiento de cada uno de los autos está representado por un **vector**.

*Un **vector** es un segmento orientado que tiene un origen y un extremo.*

Para el vector que representa el desplazamiento del auto azul, **m** es el origen y **p**, el extremo. $\overrightarrow{mp}$

Para el vector que representa el desplazamiento del auto verde, **s** es el origen y **h**, el extremo. $\overrightarrow{sh}$

Todo vector queda caracterizado por una **dirección**, un **sentido** y un **módulo**.

*La dirección de un vector está dada por la recta que lo incluye o **recta sostén**.* → Calle sobre la cual circula el auto.

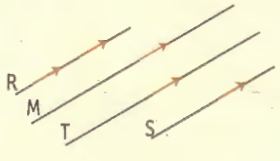
*Dos vectores tienen la misma dirección cuando se encuentran sobre una misma recta sostén o en rectas paralelas. Si dos vectores se encuentran sobre la misma recta sostén, son **colineales**.*

*El sentido de un vector está indicado por la orientación de la flecha.* → Sentido de la calle sobre la cual circula el auto.

*El módulo es la longitud o medida del vector.* → Longitud total del recorrido realizado por el auto.

Los vectores del ejemplo, $\overrightarrow{mp}$ y $\overrightarrow{sh}$, tienen la misma dirección, distinto sentido y distinto módulo.

*Los vectores que tienen la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo se llaman **vectores equipolentes**.*



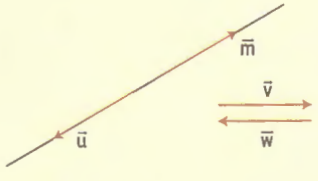

Vectores equipolentes

R // M // T // S

*Si dos vectores tienen el mismo módulo, la misma dirección, pero sentido contrario, se dice que son **vectores opuestos**.*

$\vec{v}$ es opuesto a $\vec{w}$

$\vec{u}$ es opuesto a $\vec{m}$



# Vectores en el plano; elementos

PARADA PRÁCTICA 62

## VERIFICACIÓN 62

- **Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda.**

**1)** Dos vectores son equipolentes si tienen el mismo sentido y módulo. ☐

**2)** Dos vectores son opuestos cuando tienen el mismo módulo y distinto sentido. ☐

**3)** Dos vectores colineales tienen la misma dirección. ☐

## APLICACIÓN 62

### Ejercicio 62.1

En el siguiente mapa aparecen vectores que representan el desplazamiento de distintos automóviles.

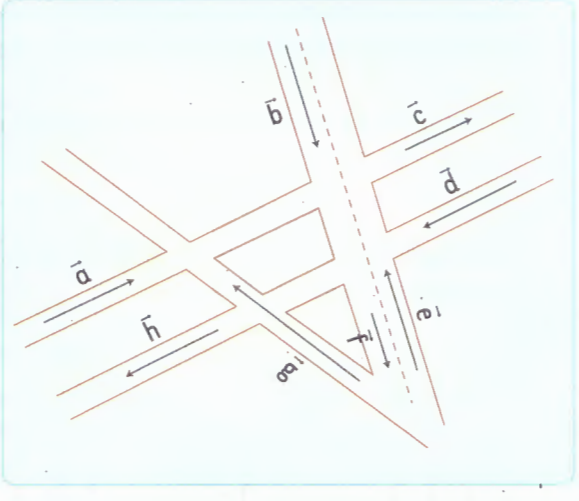
- **Indiquen todos los vectores que cumplen con cada una de las siguientes condiciones.**

**1)** Automóviles que se desplazan en el mismo sentido.

**2)** Automóviles que se desplazan en sentidos opuestos y recorren la misma distancia.

**3)** Automóviles que circulen en la misma dirección.

**4)** Automóviles que se desplazan en la misma dirección, el mismo sentido y recorren la misma distancia.




### Ejercicio 62.2

- **Completen, teniendo en cuenta la siguiente figura.**

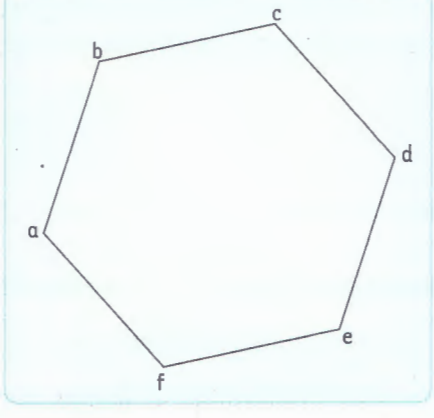
**1)** $\overrightarrow{ab}$ tiene igual módulo que:

**2)** $\overrightarrow{fa}$ es opuesto a:

**3)** $\overrightarrow{ab}$ es equipolente a:

**4)** $\overrightarrow{ad}$ tiene igual módulo que:

**5)** $\overrightarrow{fd}$ es equipolente a:

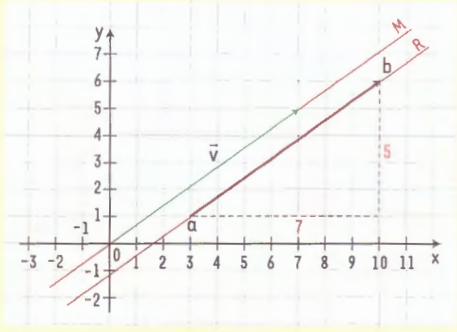


PARADA TEÓRICA

63

# Vectores referidos al origen de coordenadas

Cuando se representa un vector equipolente a $\overrightarrow{ab}$, de forma tal que el origen de este nuevo vector coincide con el origen de coordenadas, se obtiene un **representante canónico**.



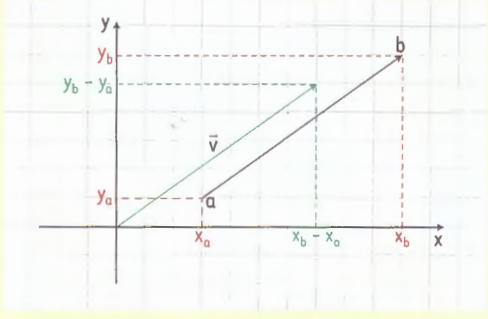

$\vec{v}$ es un representante canónico que tiene por componentes (7;5).

La pendiente de la recta sostén que contiene al vector $\overrightarrow{ab}$ (R) es igual a la pendiente de la recta sostén que contiene al vector $\vec{v}$ (M), por lo tanto son rectas paralelas.

El vector $\overrightarrow{ab}$ y el vector $\vec{v}$ son equipolentes por tener la misma dirección, sentido y módulo.

$\overrightarrow{ab} \uparrow\uparrow \vec{v}$; se lee: "vector $\overrightarrow{ab}$ equipolente al vector $\vec{v}$"

Cuando el vector tiene por origen el origen de coordenadas, las coordenadas del extremo coinciden con las componentes del vector.




Conocido el origen $\mathbf{a} = (x_a;y_a)$ y el extremo $\mathbf{b} = (x_b;y_b)$ de un vector, para hallar las componentes del vector referido al origen de coordenadas (representante canónico) se aplica la siguiente fórmula:

$$\overrightarrow{ab} \uparrow\uparrow \vec{v} \wedge \vec{v} = (x_b - x_a; y_b - y_a)$$

Si a $=(3;1)$ y b $=(7;-6) \Rightarrow \vec{v} = (7 - 3; -6 - 1) = (4;-7)$

El **vector nulo** es aquel en el cual coinciden el origen y el extremo.

En símbolos se puede expresar como $\vec{v}_0$ o bien $\vec{0}$.

La representación gráfica de $\vec{v}_0$ es un punto y sus coordenadas (0;0).

# Vectores referidos al origen de coordenadas

PARADA PRÁCTICA 63

## VERIFICACIÓN 63

Dados los siguientes puntos:

$a = (-1;3)$, $b = (4;-6)$, $c = \left(-2;\frac{1}{2}\right)$, $d = (-5;0)$ y $e = \left(-2;\frac{3}{2}\right)$

- **Hallen las componentes de los siguientes vectores, referidos al origen de coordenadas.**

1) $\overrightarrow{ab} =$

2) $\overrightarrow{dc} =$

3) $\overrightarrow{ea} =$

4) $\overrightarrow{ce} =$

5) $\overrightarrow{bd} =$

6) $\overrightarrow{da} =$

## APLICACIÓN 63

### Ejercicio 63.1

- **Hallen gráficamente el representante canónico de cada uno de los siguientes vectores e indiquen sus componentes.**

1) $\vec{a} =$

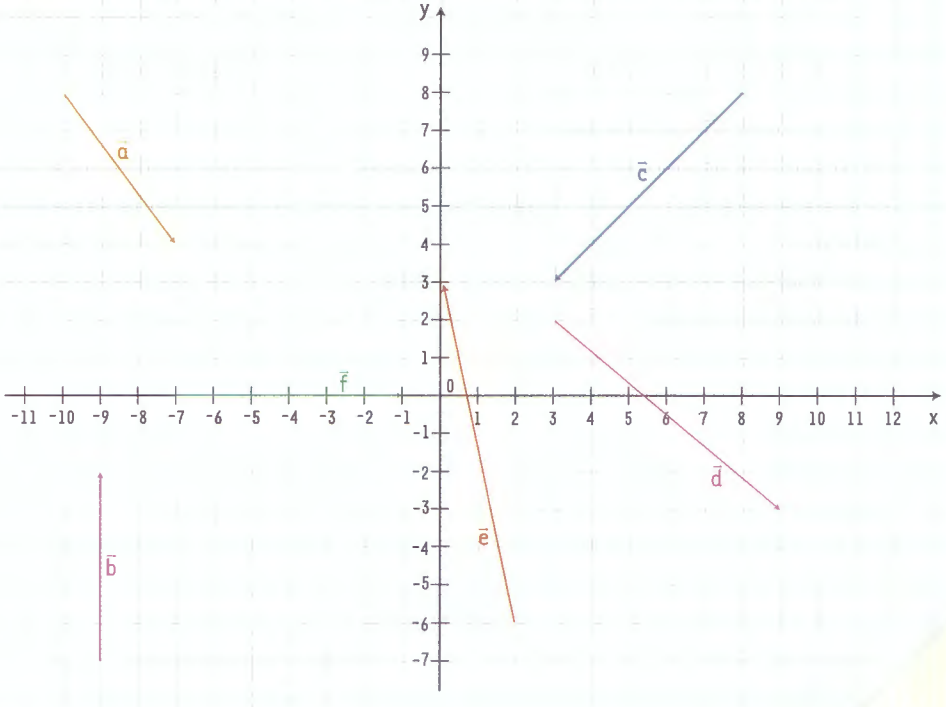
2) $\vec{b} =$

3) $\vec{c} =$

4) $\vec{d} =$

5) $\vec{e} =$

6) $\vec{f} =$




### Ejercicio 63.2

- **Completen el siguiente cuadro.**

| | Componentes del vector | Extremo | Origen |
|---|---|---|---|
| 1) | $(-2;3)$ | $(-1;8)$ | |
| 2) | $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$ | | $\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ |
| 3) | | $(-1;\sqrt{2})$ | $(-4;-5\sqrt{2})$ |

PARADA TEÓRICA

# 64 Adición y sustracción de vectores

*Las componentes del vector suma son iguales a la suma de las componentes de los vectores sumandos.*

$$\vec{v} = (v_x;v_y) \wedge \vec{w} = (w_x;w_y) \Rightarrow \vec{v} + \vec{w} = (v_x + w_x;v_y + w_y)$$

*La resta de dos vectores es igual a la suma del opuesto del vector sustraendo.*

$$\vec{v} = (v_x;v_y) \wedge \vec{w} = (w_x;w_y) \Rightarrow \vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w}) = (v_x - w_x;v_y - w_y)$$

Sean: $\vec{v} = (1;3)$ y $\vec{w} = (5;1)$.

**a)** $\vec{v} + \vec{w} = (1;3) + (5;1)$

$\vec{v} + \vec{w} = (1 + 5;3 + 1) = (6;4)$

**b)** $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w}) = (1;3) + (-5;-1)$

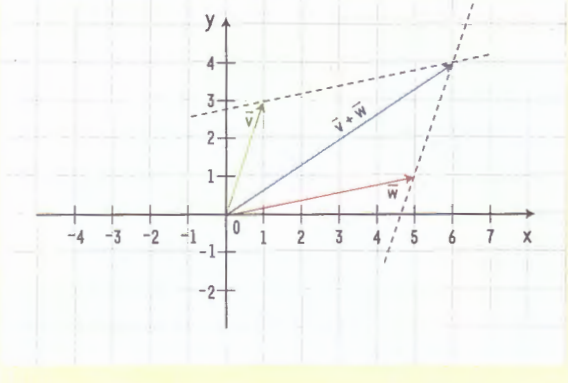
$\vec{v} - \vec{w} = (1 - 5;3 - 1) = (-4;2)$

Para sumar gráficamente se debe emplear la **regla del paralelogramo** o bien la **regla de la poligonal**.

*Regla del paralelogramo*

Se grafican los vectores con el origen en común. Por el extremo de cada uno de ellos se traza una paralela al otro vector, determinando un paralelogramo.

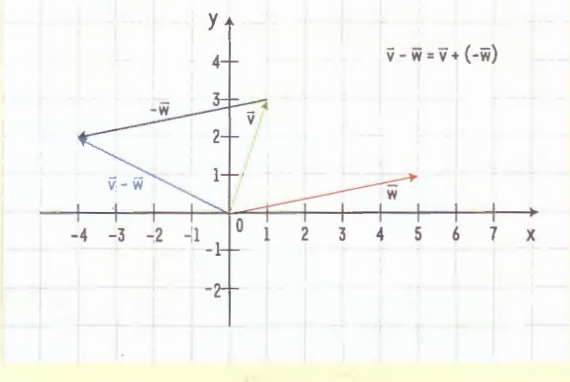
La diagonal del paralelogramo, con origen en el origen de los vectores sumandos, es el vector **suma**.



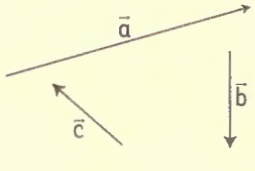

*Regla de la poligonal*

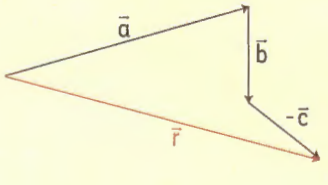
Se grafica un vector y a continuación, desde el extremo de este, se grafica el otro vector, cuidando de mantener la equipolencia.

El vector **suma** es el que queda determinado por el origen del primer vector y el extremo del segundo.




Cuando se tienen que sumar más de dos vectores, conviene utilizar la regla de la poligonal.




$$\vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c}) = \vec{r}$$

# Adición y sustracción de vectores

PARADA PRÁCTICA 64

**VERIFICACIÓN 64**

Sean los vectores $\vec{v} = (-4;-5)$ y $\vec{w} = (3;5)$.

- **Resuelvan en forma analítica.**

1) $\vec{v} + \vec{w} =$

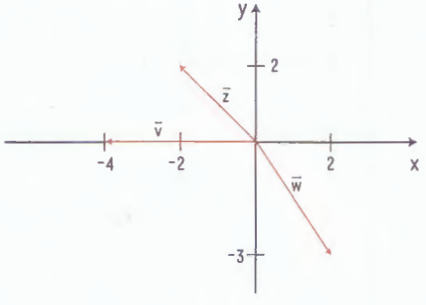
2) $\vec{v} - \vec{w} =$

**APLICACIÓN 64**

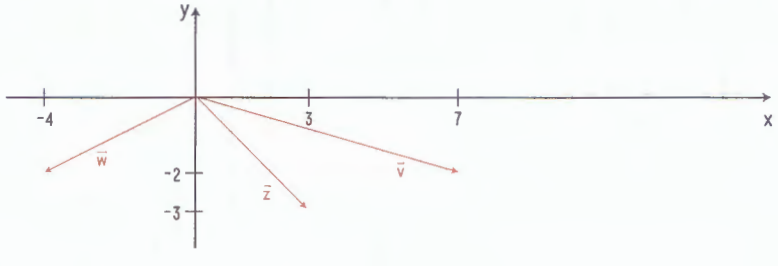
## Ejercicio 64.1

- **Resuelvan gráfica y analíticamente las siguientes operaciones.**

1) $\vec{v} + \vec{w} + \vec{z}$




2) $\vec{v} - \vec{w} + \vec{z}$




## Ejercicio 64.2

- **Expresen cada uno de los siguientes vectores como una suma o resta entre dos o más de los vectores rojos de la figura.**

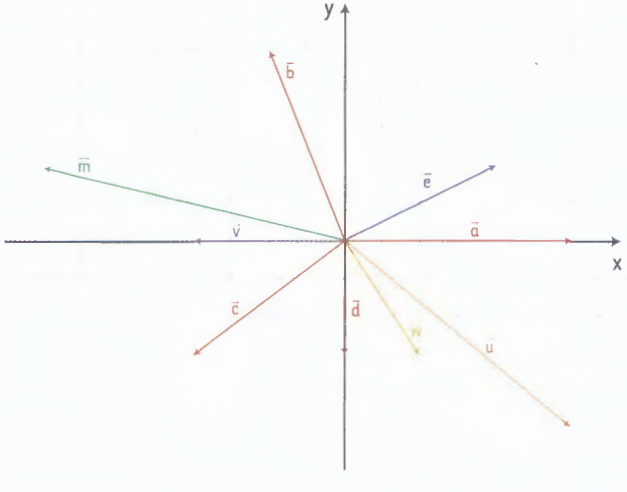
1) $\vec{v} =$

2) $\vec{w} =$

3) $\vec{e} =$

4) $\vec{u} =$

5) $\vec{m} =$

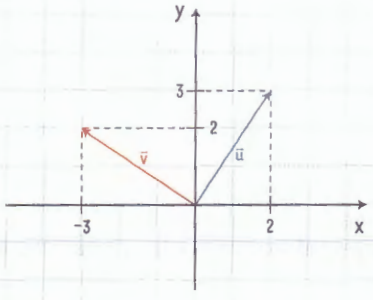


# Adición y sustracción de vectores

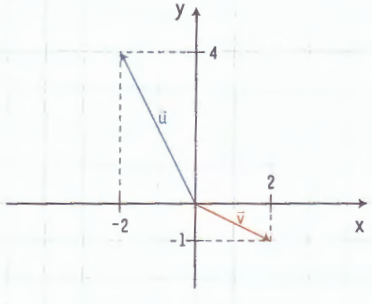
## Ejercicio 64.3

**● Hallen analíticamente las componentes del vector $\vec{w}$ que verifique cada una de las siguientes condiciones.**

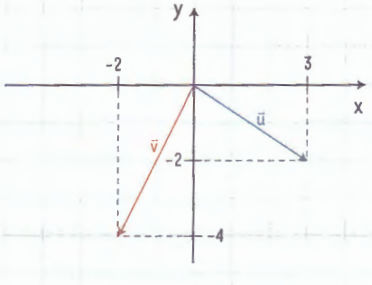
**1)** $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$



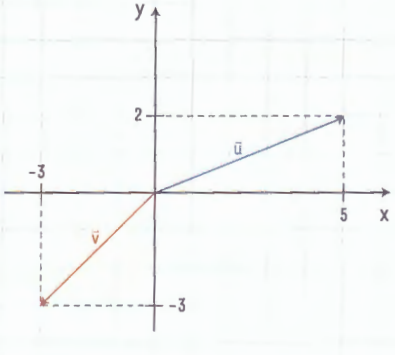

**2)** $\vec{u} = \vec{w} + 4\vec{v}$




**3)** $\vec{v} - \vec{w} = \vec{u}$



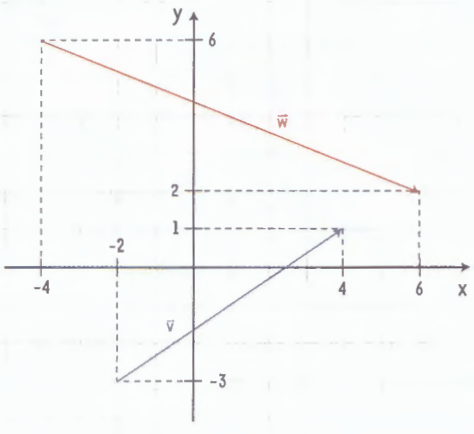

**4)** $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$



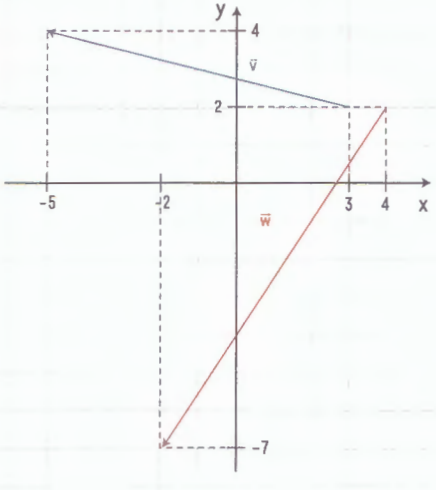
## Ejercicio 64.4

● **Hallen analíticamente las componentes del vector $\vec{u}$ en cada uno de los siguientes casos.**

**1)** $\vec{u} = \vec{v} - 2\vec{w}$

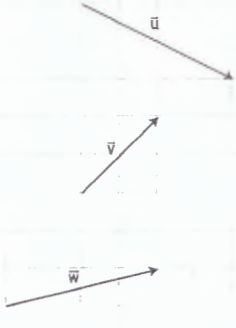



**2)** $\vec{u} = 4\vec{w} - 3\vec{v}$




## Ejercicio 64.5

● **Hallen gráficamente $\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$.**



PARADA TEÓRICA

65

# Producto de un escalar por un vector

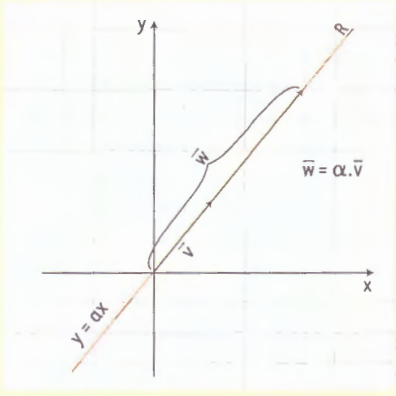
El producto de un escalar $\alpha$ por un vector $\vec{v}$, es un vector $\vec{w}$ que cumple con las siguientes condiciones:

- tiene la misma dirección que $\vec{v}$;
- su módulo es igual a $|\alpha|$ veces el módulo de $\vec{v}$ y
- el sentido es el mismo que el de $\vec{v}$ si $\alpha > 0$ y opuesto si $\alpha < 0$.

$$\vec{w} = \alpha.\vec{v}$$

*Cuando un vector $\vec{w}$ puede expresarse como el producto entre un escalar distinto de cero y un vector $\vec{v}$, se dice que los vectores son* ***linealmente dependientes****.*

*La dirección de ambos vectores está dada por una recta sostén de ecuación* $y = ax$.

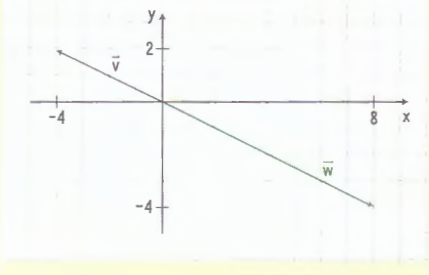



**Si $\vec{w} = \alpha.\vec{v}$ entonces $\vec{w}$ y $\vec{v}$ son linealmentes dependientes.**

En particular, si $\alpha = 0$, lo que se obtiene es **el vector nulo** y si $\alpha = -1$, se obtiene **el vector opuesto**.

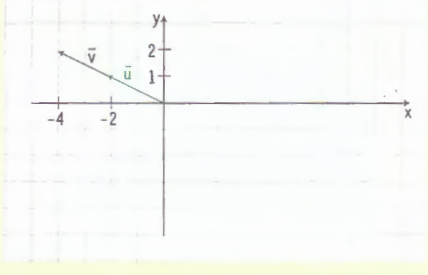
**a)** $\vec{v} = (-4;2) \wedge \alpha = -2 \Rightarrow$

$\vec{w} = -2(-4;2) = (8;-4)$




**b)** $\vec{v} = (-4;2) \wedge \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\vec{u} = \frac{1}{2}(-4;2) = (-2;1)$




## Paralelismo entre vectores

Dos vectores $\vec{v} = (v_x;v_y)$ y $\vec{w} = (w_x;w_y)$ son paralelos si tienen igual dirección, por lo tanto son linealmente dependientes.

*Dos vectores son paralelos si y sólo si sus componentes homólogas son proporcionales.*

**a)** Sean los vectores $\vec{v} = (3;-2)$ y $\vec{u} = (9;-6)$

$\vec{u} // \vec{v} \Leftrightarrow \frac{3}{9} = \frac{-2}{-6} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ → Los vectores son paralelos.

**b)** Sean los vectores $\vec{s} = (-1;3)$ y $\vec{t} = (2;4)$

$-\frac{1}{2} \neq \frac{3}{4}$ → Los vectores no son paralelos.

$$\vec{v} // \vec{w} \Leftrightarrow \frac{v_x}{w_x} = \frac{v_y}{w_y}$$

# Producto de un escalar por un vector

PARADA PRÁCTICA 65

## VERIFICACIÓN 65

● Unan con una flecha cada producto con su resultado.

1) $3\left(1;-\frac{1}{3}\right)$

2) $0(1;5)$

3) $\frac{1}{2}(-6;-2)$

4) $-\frac{1}{3}(-9;3)$

5) $-2\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$

6) $5(0;0)$

a) $\vec{0}$

b) $(-3;1)$

c) $(1;5)$

d) $(3;-1)$

e) $(-3;-1)$

## APLICACIÓN 65

### Ejercicio 65.1

● Completen con el escalar que verifique la igualdad.

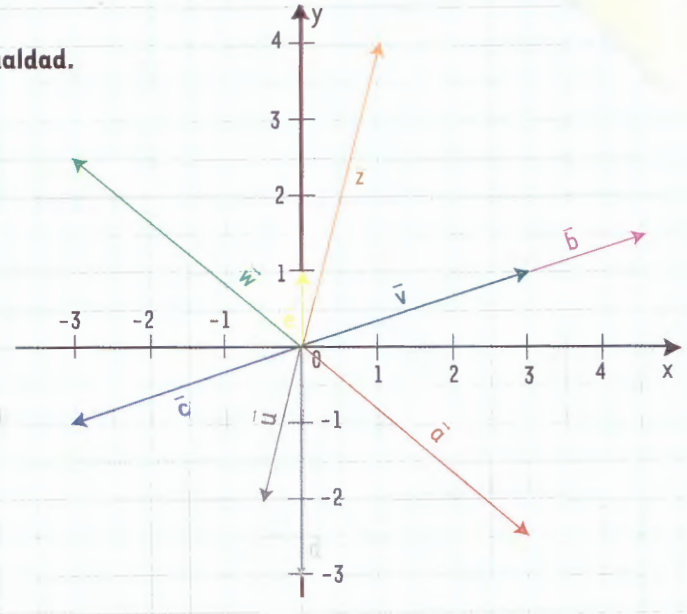
1) $\vec{w} = \quad \vec{a}$

2) $\vec{b} = \quad \vec{v}$

3) $\vec{c} = \quad \vec{v}$

4) $\vec{e} = \quad \vec{d}$

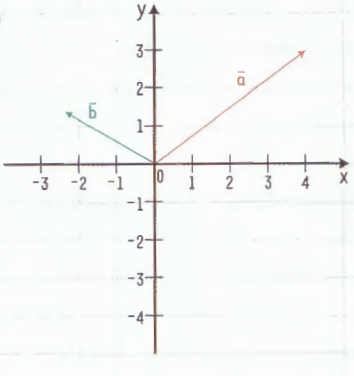
5) $\vec{u} = \quad \vec{z}$



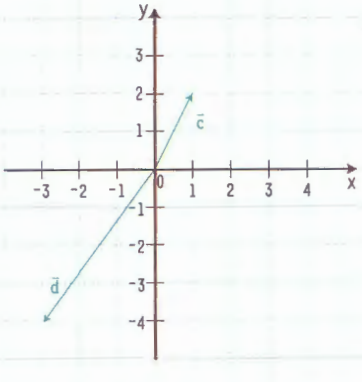

### Ejercicio 65.2

● Indiquen si los vectores de cada gráfico son o no linealmente dependientes.

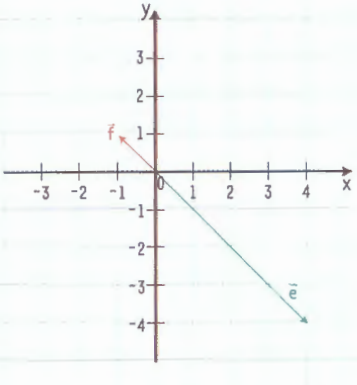
1)




2)




3)



# Producto de un escalar por un vector

## Ejercicio 65.3

- **Marquen con una X los pares de vectores que son linealmente dependientes.**

**1)** $\begin{cases} \vec{v} = \left(1;-\frac{1}{3}\right) \\ \vec{w} = \left(-4;\frac{4}{3}\right) \end{cases}$

**2)** $\begin{cases} \vec{v} = (2;-4) \\ \vec{w} = \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right) \end{cases}$

**3)** $\begin{cases} \vec{v} = (-\sqrt{2};1) \\ \vec{w} = (2;-\sqrt{2}) \end{cases}$

## Ejercicio 65.4

- **Hallen el valor de k para que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean paralelos.**

**1)** $\vec{a} = \left(-\frac{3}{7};k\right)$ y $\vec{b} = \left(\frac{3}{4};-\frac{7}{2}\right)$

**2)** $\vec{a} = (2k;-1)$ y $\vec{b} = \left(k+1;\frac{2}{5}\right)$

## Ejercicio 65.5

- **Calculen el valor de k para que los siguientes vectores resulten paralelos al vector $\vec{u} = (-2;3)$.**

**1)** $\overrightarrow{ab}$ $\begin{cases} a = (k;1) \\ b = (1;-2) \end{cases}$

**2)** $\overrightarrow{mp}$ $\begin{cases} m = \left(\frac{1}{2};-1\right) \\ p = (3;k) \end{cases}$

## Ejercicio 65.6

**● Efectúen las siguientes operaciones en forma gráfica y analítica.**

**1)** $\vec{r} = -2(\vec{v} + \vec{w}) \wedge \vec{v} = \left(\frac{1}{2}; -3\right) \wedge \vec{w} = (2;4)$

**2)** $\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w} \wedge \vec{v} = (8;-2) \wedge \vec{w} = (-4;0)$

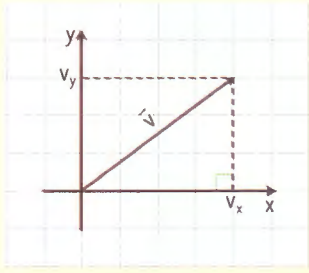
**3)** $\vec{r} = \frac{1}{3}(-\vec{v} + \vec{w}) + \vec{z} \wedge \vec{v} = (13;10) \wedge \vec{w} = (4;7) \wedge \vec{z} = (0;-2)$

PARADA TEÓRICA

# 66 Módulo de un vector

El **módulo** de un vector se calcula mediante el Teorema de Pitágoras.

Como el módulo es la longitud de un segmento, resulta siempre que $|\vec{v}| \geq 0$.




$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

**Para un vector $\vec{v} = (4;3)$, su módulo es:** $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{25} \Rightarrow |\vec{v}| = 5$

El módulo de un vector, dados su origen y extremo, es: $|\overrightarrow{ab}| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$

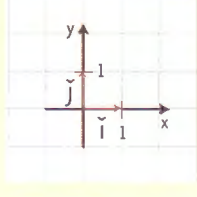
**Para un vector $\overrightarrow{ab}$, siendo $a = (1;-2)$ y $b = (-3;5)$, su módulo es:**

$|\overrightarrow{ab}| = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (5 + 2)^2} \Rightarrow |\overrightarrow{ab}| = \sqrt{16 + 49} \Rightarrow |\overrightarrow{ab}| = \sqrt{65}$

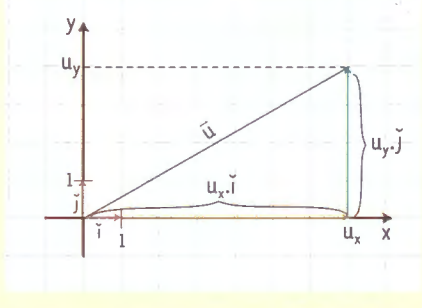
*Si el módulo de un vector es igual a 1, es un* ***vector unitario o versor.*** $|\vec{v}| = 1 \Rightarrow \check{v}$

• Al vector de módulo 1, en la dirección del eje "x" y con sentido positivo, se lo denomina **versor** $\check{i}$.

• Al vector de módulo 1, en la dirección del eje "y" y con sentido positivo, se lo denomina **versor** $\check{j}$.




Cualquier vector se puede expresar utilizando los versores de la base canónica ($\check{i}$ y $\check{j}$).

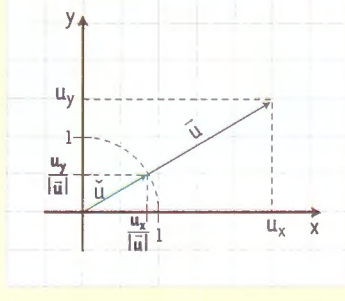



$$\vec{u} = u_x.\check{i} + u_y.\check{j}$$

Para hallar un versor en la dirección de un vector dado se dividen las componentes del vector por su módulo.

$$\left|\left(\frac{u_x}{|\vec{u}|};\frac{u_y}{|\vec{u}|}\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{u_x}{|\vec{u}|}\right)^2 + \left(\frac{u_y}{|\vec{u}|}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{u_x^2 + u_y^2}{|\vec{u}|^2}} = \frac{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}{\sqrt{|\vec{u}|^2}} = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{u}|} = 1$$




$$\vec{u} = (u_x;u_y) \Rightarrow \check{u} = \left(\frac{u_x}{|\vec{u}|};\frac{u_y}{|\vec{u}|}\right)$$

# Módulo de un vector

PARADA PRÁCTICA 66

## VERIFICACIÓN 66

- **Calculen el módulo de cada uno de los siguientes vectores.**

**1)** $\vec{u} = (-6;8)$ **2)** $\vec{v} = \left(\frac{3}{2};-2\right)$ **3)** $\vec{w} = 9\check{i} - 3\check{j}$

## APLICACIÓN 66

### Ejercicio 66.1

- **Expresen los vectores del gráfico en función de los versores de la base canónica.**

**1)** $\vec{a} =$

**2)** $\vec{b} =$

**3)** $\vec{c} =$

**4)** $\vec{d} =$

**5)** $\vec{e} =$

**6)** $\vec{f} =$

### Ejercicio 66.2

Sean a = (-2;-4), b = (-5;-3), c = (1;-3) y d = (0;4).

- **Hallen las componentes de los vectores $\overrightarrow{ba}$ y $\overrightarrow{cd}$.**

**1)** $\overrightarrow{ba} =$ **2)** $\overrightarrow{cd} =$

- **Calculen el módulo de los vectores $\overrightarrow{ba}$ y $\overrightarrow{cd}$.**

**3)** $|\overrightarrow{ba}| =$ **4)** $|\overrightarrow{cd}| =$

- **Hallen los versores $\check{ba}$ y $\check{cd}$.**

**5)** $\check{ba} =$ **6)** $\check{cd} =$

PARADA TEÓRICA 67

# Producto escalar de dos vectores

El producto escalar de dos vectores da por resultado un número real y se define, en **función de sus componentes**, como:

$$\vec{v} = (v_x;v_y) \wedge \vec{w} = (w_x;w_y) \Rightarrow \vec{v}.\vec{w} = v_x.w_x + v_y.w_y$$

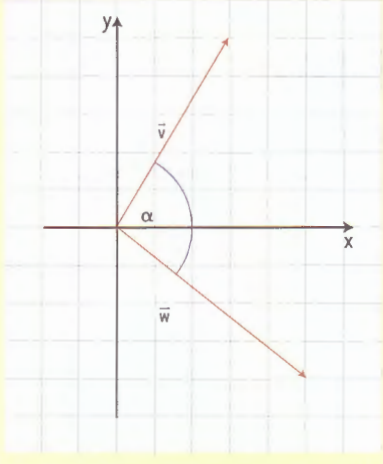
$$\vec{v} = (2;-5) \wedge \vec{w} = \left(3;\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \vec{v}.\vec{w} = 2.3 + (-5)\frac{1}{2} = 6 - \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$$

## Interpretación geométrica del producto escalar

$$\vec{v}.\vec{w} = |\vec{v}|.|\vec{w}|.\cos \widehat{\vec{v}\,\vec{w}}$$

El ángulo determinado por dos vectores se calcula despejando la fórmula anterior.

$$\widehat{\vec{v}\,\vec{w}} = \text{arc cos}\,\frac{\vec{v}.\vec{w}}{|\vec{v}|.|\vec{w}|}$$



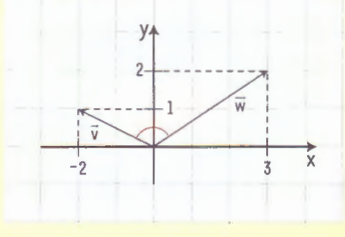

**a)** $|\vec{v}| = \sqrt{5} \wedge |\vec{w}| = \frac{3}{2} \wedge \widehat{\vec{v}\,\vec{w}} = 60° \Rightarrow \vec{v}.\vec{w} = \sqrt{5}\frac{3}{2}\cos 60° = \frac{3\sqrt{5}}{4}$

**b)** $\vec{v} = (-2;1) \wedge \vec{w} = (3;2)$

$|\vec{v}| = \sqrt{5} \wedge |\vec{w}| = \sqrt{13}$

$\vec{v}.\vec{w} = -2.3 + 1.2 = -4$

$\widehat{\vec{v}\,\vec{w}} = \text{arc cos}\left(-\frac{4}{\sqrt{65}}\right) \Rightarrow \widehat{\vec{v}\,\vec{w}} \cong \mathbf{119°\,44'\,42''}$



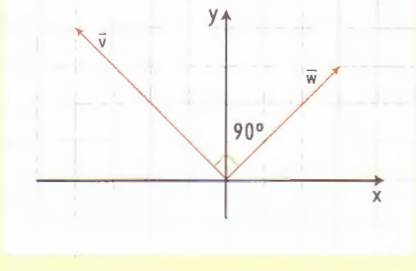

## Vectores perpendiculares

*Dos vectores son perpendiculares si y sólo si su producto escalar es igual a cero.* $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v}.\vec{w} = 0$

$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \widehat{\vec{v}\,\vec{w}} = 90°$

$\vec{v}.\vec{w} = |\vec{v}|.|\vec{w}|.\cos 90°$

$\vec{v}.\vec{w} = |\vec{v}|.|\vec{w}|.0 = 0$



# Producto escalar de dos vectores

PARADA PRÁCTICA 67

## VERIFICACIÓN 67

- **Calculen $\vec{v}.\vec{w}$ en cada uno de los siguientes casos.**

**1)** $\vec{v} = \left(-\frac{5}{6};-2\right) \wedge \vec{w} = (3;-1)$

**2)** $|\vec{v}| = 3 \wedge |\vec{w}| = 6 \wedge \hat{\vec{v}\vec{w}} = 120°$

## APLICACIÓN 67

### Ejercicio 67.1

- **Calculen el producto escalar e indiquen si los siguientes pares de vectores son o no perpendiculares.**

**1)** $\vec{v} = (1;-2) \wedge \vec{w} = (3;-1)$

**3)** $\vec{u} = \left(\frac{7}{3};-5\right) \wedge \vec{r} = \left(-\frac{3}{7};-\frac{1}{5}\right)$

**2)** $\vec{s} = \left(0;\frac{4}{9}\right) \wedge \vec{t} = \left(0;-\frac{9}{4}\right)$

**4)** $\vec{e} = (\sqrt{3};2) \wedge \vec{f} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{1}{2}\right)$

### Ejercicio 67.2

- **Unan con una flecha cada producto $\vec{v}.\vec{w}$ con un resultado.**

**1)** $|\vec{v}| = 3 \wedge |\vec{w}| = 8 \wedge \hat{\vec{v}\vec{w}} = \frac{\pi}{3}$

**2)** $|\vec{v}| = 2 \wedge |\vec{w}| = 3 \wedge \hat{\vec{v}\vec{w}} = \frac{2\pi}{3}$

**3)** $|\vec{v}| = \frac{3}{2} \wedge |\vec{w}| = 4 \wedge \hat{\vec{v}\vec{w}} = 0$

**4)** $|\vec{v}| = \sqrt{3} \wedge |\vec{w}| = \sqrt{3} \wedge \hat{\vec{v}\vec{w}} = \pi$

**5)** $|\vec{v}| = \sqrt{2} \wedge |\vec{w}| = 12 \wedge \hat{\vec{v}\vec{w}} = \frac{3\pi}{4}$

**a)** 6

**b)** -12

**c)** 3

**d)** -3

**e)** -6

**f)** 12

### Ejercicio 67.3

- **Hallen el valor de k para que los vectores $\vec{u} = \left(-\frac{6}{5};-3\right)$ y $\vec{z} = \left(k;\frac{1}{2}\right)$ resulten perpendiculares.**

# Producto escalar de dos vectores

## Ejercicio 67.4

- **Calculen el ángulo $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$ en cada uno de los siguientes casos.**

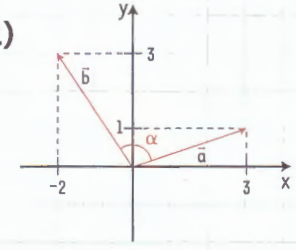
**1)** $|\vec{a}| = 2 \wedge |\vec{b}| = \frac{1}{3} \wedge \vec{a}.\vec{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

**2)** $|\vec{a}| = \sqrt{2} \wedge |\vec{b}| = \frac{1}{2} \wedge \vec{a}.\vec{b} = -\frac{1}{2}$

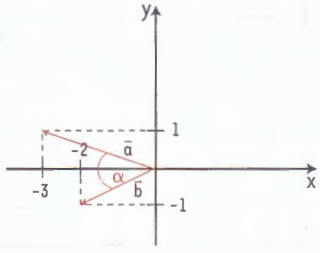
## Ejercicio 67.5

- **Calculen el ángulo $\widehat{\alpha}$ en cada uno de los siguientes casos.**

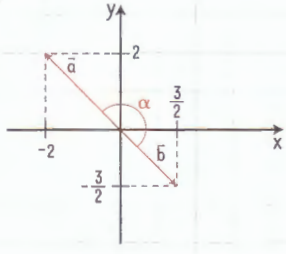
**1)**



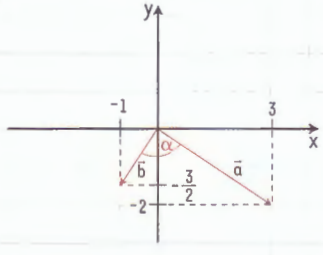

**3)**




**2)**




**4)**



## Ejercicio 67.6

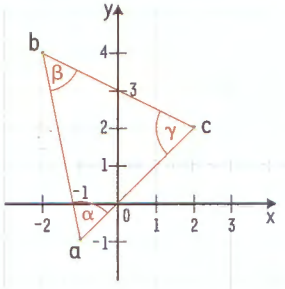
● **Calculen el ángulo que forma el vector $\vec{u} = (5;-2)$ con cada uno de los siguientes vectores.**

**1)** $\vec{v} = \vec{i} + 5\vec{j}$

**2)** $\vec{w} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$

## Ejercicio 67.7

● **Calculen los ángulos interiores del triángulo $\hat{abc}$.**



PARADA TEÓRICA 68

# Ecuación vectorial de la recta

*Un vector es **asociado** a una recta cuando tiene su misma dirección, es decir, que puede estar incluido en la recta o en una paralela a la misma.*

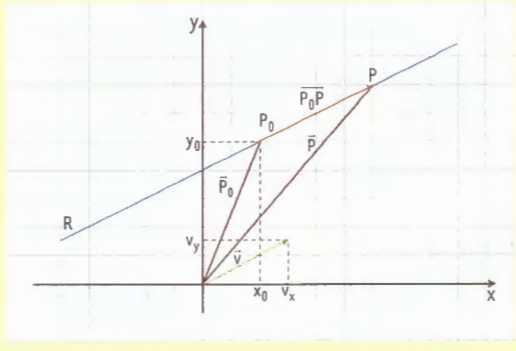
Dados un punto $P_0$ perteneciente a una recta **R** y un vector $\vec{v}$, asociado a la misma, se puede hallar su ecuación vectorial.

Cualquier punto P, perteneciente a la recta R, determina con el punto $P_0$ un vector $\overrightarrow{P_0P}$ paralelo al vector asociado.

$$\vec{P} = \vec{P_0} + \overrightarrow{P_0P} \quad (1)$$

Como el vector $\overrightarrow{P_0P}$ es paralelo al vector $\vec{v}$, resulta:

$$\overrightarrow{P_0P} = \alpha.\vec{v} \qquad (2)$$




Reemplazando (2) en (1), se obtiene:

$$\vec{P} = \vec{P_0} + \alpha.\vec{v} \wedge \alpha \in R$$ → **Ecuación vectorial de la recta.**

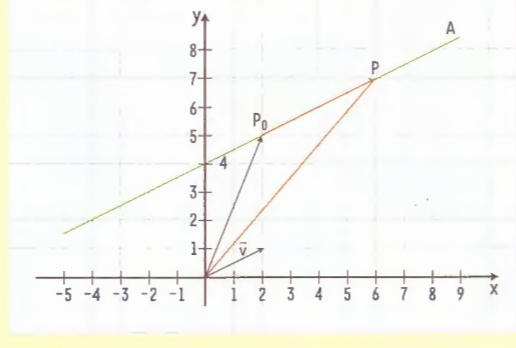
$$R:(x;y) = (x_0;y_0) + \alpha(v_x;v_y)$$ → **En función de las componentes de cada vector.**

$\vec{v} = (2;1)$ y $P_0 = (2;5)$

La ecuación vectorial de la recta A es:

$A:(x;y) = (2;5) + \alpha(2;1)$

Asignándole valores a $\alpha$, se obtienen todos los puntos de la recta.




## Relación entre la ecuación vectorial y la explícita

**Ecuación vectorial** $R:(x;y) = (x_0;y_0) + \alpha(v_x;v_y)$

**Ecuación explícita** $y = \frac{v_y}{v_x}x + b$

Dados $P_0 = (3;-1)$ y $\vec{v} = (-2;5)$, siendo $\vec{v}$ un vector asociado a la recta R, hallar su ecuación explícita.

$$\underbrace{R:(x;y) = (3;-1) + \alpha(-2;5)}_{\text{Ecuación vectorial}} \Rightarrow R:(x;y) = (3;-1) + (-2\alpha;5\alpha) \Rightarrow R:(x;y) = (3 - 2\alpha;-1 + 5\alpha)$$

$$R:\begin{cases} x = 3 - 2\alpha \\ y = -1 + 5\alpha \end{cases} \Rightarrow R:\begin{cases} \alpha = \frac{x - 3}{-2} \\ \alpha = \frac{y + 1}{5} \end{cases} \Rightarrow R:\frac{y + 1}{5} = \frac{x - 3}{-2} \Rightarrow R:-2(y + 1) = 5(x - 3)$$

$$R:-2y - 2 = 5x - 15 \Rightarrow R:-2y = 5x - 13 \Rightarrow \underbrace{R:y = -\frac{5}{2}x + \frac{13}{2}}_{\text{Ecuación explícita}}$$

# Ecuación vectorial de la recta

PARADA PRÁCTICA 68

**VERIFICACIÓN 68**

Dados los puntos a = (3;-1) y b = (5;2).

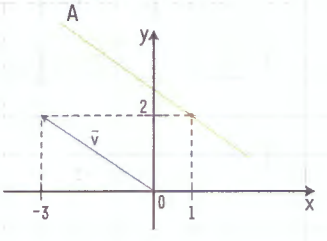
- **Hallen la ecuación vectorial de la recta M que pasa por el punto (1;4) y es paralela al vector $\overrightarrow{ab}$.**

**APLICACIÓN 68**

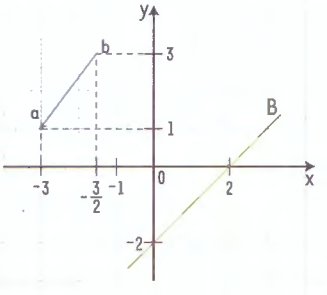
## Ejercicio 68.1

- **Encuentren la ecuación vectorial de cada una de las siguientes rectas.**

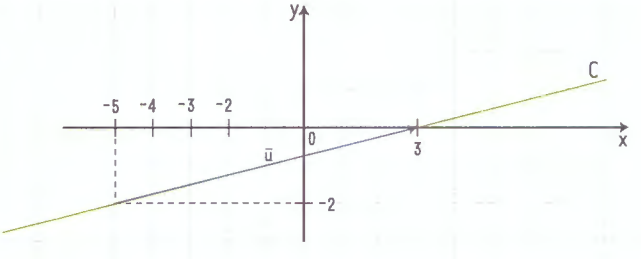
**1)**




**2)**




**3)**




## Ejercicio 68.2

- **Escriban la ecuación explícita de cada una de las siguientes rectas.**

**1)** $R_1$: (x;y) = (-1;2) + $\alpha$(2;-3)

**2)** $R_2$: (x;y) = (2;-5) + $\alpha$(-2;1)

# TRAMO J: ejercitación final

**INTEGRACIÓN J**

## Ejercicio J.1

- **Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda.**

**1)** Dos vectores colineales tienen sus componentes homólogas proporcionales.

**2)** Dos vectores opuestos no tienen la misma dirección.

**3)** Si el escalar es cero, entonces $\alpha.\vec{v}$ da por resultado cero.

**4)** El producto escalar entre dos vectores es un vector.

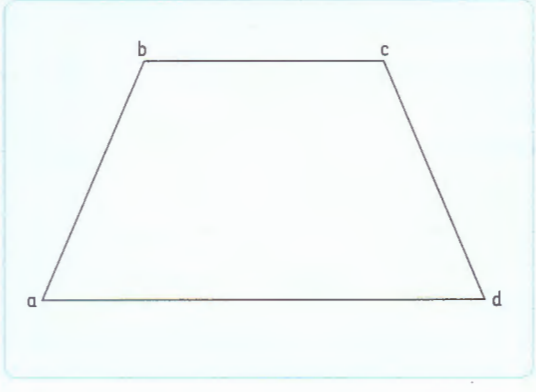
**5)** El producto escalar entre dos vectores colineales es igual a cero.

**6)** Si dos vectores son colineales y del mismo sentido, su producto escalar es el producto de sus módulos.

## Ejercicio J.2

- **Escriban el vector solución de cada una de las siguientes operaciones.**

**1)**




a) $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} =$

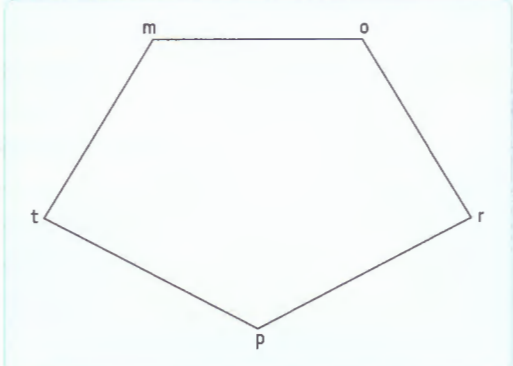
b) $\overrightarrow{ca} + \overrightarrow{ad} =$

c) $\overrightarrow{bc} - \overrightarrow{dc} =$

d) $-\overrightarrow{db} + \overrightarrow{cb} =$

e) $\overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ad} - \overrightarrow{bd} =$

**2)**




a) $\overrightarrow{om} + \overrightarrow{mp} =$

b) $\overrightarrow{ot} + \overrightarrow{tr} =$

c) $\overrightarrow{pt} - \overrightarrow{pr} =$

d) $-\overrightarrow{mr} - \overrightarrow{tm} + \overrightarrow{to} =$

e) $\overrightarrow{op} - (\overrightarrow{pt} + \overrightarrow{to}) =$

## Ejercicio J.3

- **Hallen el valor de x para que el producto escalar entre los vectores $\vec{w} = (x - 1;3)$ y $\vec{v} = (2;x - 3)$ sea igual a 24.**

## Ejercicio J.4

Dados los puntos a = (-2;-3), b = (-5;1) y c = (1;4).

- **Hallen las coordenadas del punto d sabiendo que $\overrightarrow{ab} \uparrow\uparrow \overrightarrow{cd}$.**

## Ejercicio J.5

Dados los vectores $\vec{w} = (2;5)$ y $\vec{v} = (5;-2)$.

- **Calculen la solución de cada una de las siguientes operaciones.**

**1)** $\vec{v}.\vec{w}$ **2)** $\vec{v} + \vec{w} + (-7;3)$ **3)** $2\vec{v} + \vec{w} - (12;1)$

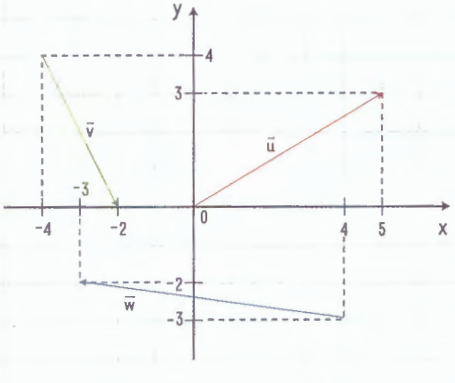
## Ejercicio J.6

- **Calculen el módulo de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, sabiendo que son vectores de sentidos opuestos, su producto escalar es -8 y que $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$.**

## Ejercicio J.7

- **Hallen las componentes de cada uno de los siguientes versores.**

**1)** $\check{u}$




**2)** $\check{v}$

**3)** $\check{w}$

# TRAMO J: ejercitación final

INTEGRACIÓN J

## Ejercicio J.8

- **Resuelvan cada una de las siguientes operaciones gráfica y analíticamente.**

**1)** $\vec{r} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{a} = (5;-2) \wedge \vec{b} = (3;0)$

**2)** $\vec{s} = -3\vec{c} + 2(\vec{d} - \vec{b}) \wedge \vec{c} = (-2;1) \wedge \vec{d} = (0;2) \wedge \vec{b} = (3;0)$

**3)** $\vec{t} = \vec{f} + 2\vec{c} - \vec{e} \wedge \vec{c} = (-2;1) \wedge \vec{e} = (-6;-3) \wedge \vec{f} = (-2;-5)$

## Ejercicio J.9

**● Hallen las componentes del vector $\vec{x}$ para que se verifiquen las siguientes igualdades.**

**1)** $\vec{v} + 2\vec{w} - \vec{x} = 0 \wedge \vec{v} = \left(3;-\frac{5}{2}\right) \wedge \vec{w} = (-5;1)$ **2)** $2(\vec{x} - \vec{v}) = \vec{w} \wedge \vec{v} = (-1;4) \wedge \vec{w} = (5;-5)$

## Ejercicio J.10

**● Hallen la ecuación vectorial de cada una de las siguientes rectas.**

**1) A:** pasa por el punto $(-3;-3)$ y es paralela al vector $\vec{v} = (3;2)$.

**2) B:** es perpendicular a la recta A y pasa por el punto $(4;6)$.

**3) C:** pasa por el origen de coordenadas y el punto de intersección de las rectas A y B.

# TRAMO J: ejercitación final

## Ejercicio J.11

- **Hallen la ecuación explícita de cada una de las siguientes rectas.**

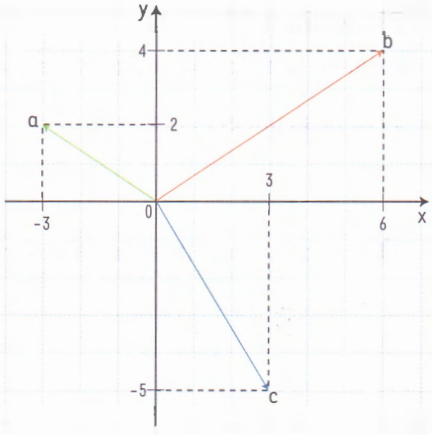
**1)** $A : (x;y) = (-1;4) + \alpha(2;-1)$

**2)** $B : (x;y) = \left(\frac{1}{2};-3\right) + \alpha\left(-1;\frac{1}{3}\right)$

## Ejercicio J.12

- **Calculen.**

**1)** La longitud de cada vector.




**2)** El ángulo $\widehat{\overrightarrow{oa}\ \overrightarrow{ob}}$.

## Ejercicio J.13

Dados los puntos $a = (0;3)$, $b = (2;5)$ y $c = (6;1)$.

- **Grafiquen el triángulo $\triangle abc$ y demuestren que es rectángulo.**

# CONTROL DE LOS RESULTADOS

TRAMO A

TRAMO B

TRAMO C

TRAMO D

TRAMO E

TRAMO F

TRAMO G

TRAMO H

TRAMO I

TRAMO J

# CONTROL DE LOS RESULTADOS

TRAMO A

## VERIFICACIÓN 1

1) c
2) b
3) e
4) a
5) e

## APLICACIÓN 1

### Ejercicio 1.1

1) F
2) V
3) F
4) V
5) F
6) V
7) F
8) F

### Ejercicio 1.2

1) 2,5
2) 3,6
3) 1,15
4) -0,95

### Ejercicio 1.3

1) $(-\infty;-3,6)$
2) $(4;9)$
3) $[0;2,4]$
4) $[-4,5;-1,2)$

### Ejercicio 1.4

1) $[8;+\infty)$
2) $(-\infty;-2)$
3) $(0;6]$
4) $(-4;1)$

## VERIFICACIÓN 2

1) 8,06
2) 1,68
3) -0,11
4) -30

## APLICACIÓN 2

### Ejercicio 2.1

1) 0,5
2) 1,5
3) -7
4) 0,03
5) 15
6) 100
7) $\frac{3}{5}$
8) -4
9) 4
10) -0,8
11) 0,3
12) -0,1

### Ejercicio 2.2

1) 1,7
2) 9,4
3) -0,04
4) $-\frac{8}{15}$
5) -0,11
6) -62,4

### Ejercicio 2.3

1) 3,4
2) $10,\widehat{6}$
3) $0,0\widehat{4}$
4) $0,7\widehat{3}$
5) $3,\widehat{45}$
6) $0,3\widehat{06}$

### Ejercicio 2.4

1) $\frac{8}{9}$
2) $\frac{23}{9}$
3) $\frac{104}{33}$
4) $\frac{2}{11}$
5) $\frac{227}{90}$
6) $\frac{236}{45}$

### Ejercicio 2.5

1) -6
2) $\frac{6}{5}$
3) $-\frac{1}{45}$
4) $\frac{10}{9}$

### Ejercicio 2.6

1) 9
2) $-\frac{8}{27}$
3) 0,01
4) -0,008
5) 0,0081
6) $\frac{1}{9}$
7) $\frac{8}{729}$
8) $\frac{121}{81}$

### Ejercicio 2.7

1) $-\frac{1}{2}$
2) 1,1
3) 0,3
4) -0,3
5) 0,04
6) $\frac{2}{3}$
7) $\frac{4}{3}$
8) $\frac{5}{6}$

### Ejercicio 2.8

1) $-\frac{3}{4}$
2) $-\frac{1}{15}$
3) $-\frac{1}{33}$

4) $\frac{71}{20}$

5) $\frac{1}{4}$

6) $-\frac{1}{5}$

**VERIFICACIÓN 3**

1) y 4)

**APLICACIÓN 3**

### Ejercicio 3.1

1) $x = 6$
2) $x = -1,5$
3) $x = \frac{10}{3}$
4) $x = \frac{1}{2}$
5) $x = -\frac{2}{7}$
6) $x = -\frac{6}{11}$

### Ejercicio 3.2

1) $\frac{6}{5}$
2) $\frac{4}{5}$
3) 8
4) 16
5) 1 y 2
6) 20

### Ejercicio 3.3

1) $S = (-\infty;4)$
2) $S = (-\infty;6]$
3) $S = \left(-\infty;\frac{11}{2}\right]$
4) $S = (3;+\infty)$
5) $S = [1,2;+\infty)$
6) $S = (-\infty;-0,48]$
7) $S = \left(-\infty;\frac{41}{30}\right)$
8) $S = \left(\frac{2}{15};+\infty\right)$

**VERIFICACIÓN 4**

1) 2,3
2) 0,5
3) 4
4) 9

**APLICACIÓN 4**

### Ejercicio 4.1

1) =
2) =
3) <
4) =
5) >
6) <
7) <
8) >

### Ejercicio 4.2

1) $\{-15,4;15,4\}$
2) $\{0\}$
3) $(-3;3)$
4) $(-\infty;-6,2)\cup(6,2;+\infty)$
5) $[-0,1;0,1]$
6) $(-\infty;-\pi]\cup[\pi;+\infty)$

### Ejercicio 4.4

1) $S = \{2;-2\}$
2) $S = \{3;-3\}$
3) $S = \{0,5;-0,5\}$
4) $S = \{1;-1\}$

**VERIFICACIÓN 5**

1) $S = \{7;-7\}$
2) $S = \left\{0;-\frac{2}{5}\right\}$

**APLICACIÓN 5**

### Ejercicio 5.1

1) $S = \{2;-2\}$
2) $S = \left\{0;-\frac{1}{2}\right\}$
3) $S = \{3;-3\}$
4) $S = \left\{0;\frac{7}{6}\right\}$

### Ejercicio 5.2

1) $S = \left\{\frac{3}{2};-2\right\}$
2) $S = \left\{3;-\frac{1}{4}\right\}$
3) $S = \{3\}$
4) $S = \left\{-\frac{1}{3};-\frac{5}{2}\right\}$
5) $S = \{-3;1\}$
6) $S = \left\{-\frac{3}{2};1\right\}$
7) $S = \left\{3;-\frac{3}{2}\right\}$
8) $S = \{-4;-1\}$

### Ejercicio 5.3

1) 3
2) 5
3) $\frac{1}{2}$

### Ejercicio 5.4

1) 30 cm
2) 38 cm
3) 56 cm

**VERIFICACIÓN 6**

1) $S = \{-2;8\}$
2) $S = [-2;8]$

**APLICACIÓN 6**

### Ejercicio 6.1

1) $S = \left\{\frac{3}{2};0\right\}$
2) $S = \left\{\frac{3}{4};\frac{31}{8}\right\}$

### Ejercicio 6.2

1) $S = (-\infty;-3)$
2) $S = [3;+\infty)$

**VERIFICACIÓN 7**

1) b

# CONTROL DE LOS RESULTADOS

2) e
3) a
4) d

## APLICACIÓN 7

### Ejercicio 7.1

1) $S = (-2;2)$
2) $S = (-\infty;0] \cup [3;+\infty)$
3) $S = (-\infty;-3] \cup [3;+\infty)$
4) $S = (-4;0)$
5) $S = (-\infty;-5) \cup (5;+\infty)$
6) $S = (-\infty;-3) \cup (0;+\infty)$
7) $S = (-\infty;-1] \cup [3;+\infty)$
8) $S = \left(\frac{1}{2};1\right)$

## VERIFICACIÓN 8

1) 0,0054
2) 0,0002
3) 0,0399

## APLICACIÓN 8

### Ejercicio 8.1

1) 2,2; 2,23; 2,236; 2,2360
2) 0,1; 0,12; 0,125; 0,1255
3) 0,4; 0,42; 0,428; 0,4285

### Ejercicio 8.2

1) 3,9; 3,87; 3,873; 3,8730
2) 1,4; 1,39; 1,388; 1,3878
3) 0,1; 0,09; 0,091; 0,0909

### Ejercicio 8.3

1) 0,0099
2) 0,45895

### Ejercicio 8.4

1) 3,426
2) 4,613

## VERIFICACIÓN 9

1) F
2) F
3) F
4) V
5) F
6) F

## APLICACIÓN 9

### Ejercicio 9.1

1) $a$
2) $x^{11}$
3) $\frac{1}{b}$
4) $a^6.b^2$
5) $\frac{m^2}{n^{12}}$
6) $\frac{y^2}{x^2}$

### Ejercicio 9.2

1) $a^4$
2) $x^2$
3) $\sqrt[3]{\frac{x^4}{y^5}}$
4) $x^3.z^2$

### Ejercicio 9.3

1) $\frac{19}{3}$
2) $\frac{37}{6}$
3) $-\frac{43}{4}$
4) $\frac{29}{12}$

## VERIFICACIÓN 10

Resolución gráfica

## APLICACIÓN 10

### Ejercicio 10.1

1) $2\sqrt{2}$
2) $\frac{3}{10}\sqrt{3}$
3) $10\sqrt[3]{10}$
4) $x^5.\sqrt[4]{x}$
5) $4x\sqrt{x}$
6) $3ab^3.\sqrt{c}$
7) $-2x^2.y\sqrt[3]{y^2}$
8) $\frac{3}{5}m^3.n^5.\sqrt[3]{3m^2.n}$
9) $\frac{2x^2}{3y^5}\sqrt[4]{2x^2}$
10) $\frac{4a^2.b^3}{10c^7}\sqrt[3]{a^2.b}$

## VERIFICACIÓN 11

1) $-3\sqrt{2}$
2) 0

## APLICACIÓN 11

### Ejercicio 11.1

1) $2\sqrt{a} - 3\sqrt{b}$
2) $5\sqrt{x}$
3) $8\sqrt{2}$
4) $2y^2.\sqrt{3}$
5) $-3\sqrt[3]{2}$
6) $7a\sqrt{a}$

### Ejercicio 11.2

1) $\frac{97}{4}$
2) $a\sqrt{2b}$
3) $-\frac{2}{3}\sqrt[5]{a^3.b}$
4) $4\sqrt{2}$
5) $5\sqrt{6} - 12$

## VERIFICACIÓN 12

1) $\sqrt[6]{x^4}$ y $\sqrt[6]{x^3}$
2) $\sqrt[12]{16}$ y $\sqrt[12]{8}$

## APLICACIÓN 12

### Ejercicio 12.1

1) $x\sqrt[10]{3^7.x}$
2) $m\sqrt[12]{m^{11}}$
3) $b\sqrt[15]{a^{11}.b^4}$
4) $4x\sqrt[3]{2x^2}$
5) $\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$
6) $\sqrt[12]{\frac{1}{3x^2}}$

## Ejercicio 12.2

1) $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{7}{2}}$

2) $\sqrt[12]{x^5}$

3) $\sqrt[8]{x^7}$

4) $\sqrt[12]{2^7}$

**VERIFICACIÓN 13**

**2), 3) y 4)**

**APLICACIÓN 13**

## Ejercicio 13.1

1) $5\sqrt[3]{4}$

2) $\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{3}$

3) $\frac{2\sqrt[9]{2y}}{y}$

4) $\sqrt[6]{2x}$

5) $\sqrt[6]{x}$

6) $\sqrt{2}-1$

7) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

8) $\frac{11-6\sqrt{2}}{7}$

9) $2\sqrt{6}-5$

10) $\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{2}$

**INTEGRACIÓN A**

## Ejercicio A.1

1) $(-\infty;0]$

2) $(-2;5]$

3) $\varnothing$

4) $(-1;3]$

5) $\mathbb{R}$

6) $[-5;4)$

## Ejercicio A.2

1) $-1,6$

2) $\frac{7}{12}$

3) $\frac{7}{20}$

4) $\frac{5}{8}$

5) $\frac{4}{5}$

6) $-\frac{56}{15}$

## Ejercicio A.3

1) $\frac{7}{23}$

2) $-\frac{13}{7}$

3) $S=\{1;0\}$

4) $\frac{4}{7}$

5) $S=\{0;-1\}$

6) $S=\{2\sqrt{3};-2\sqrt{3}\}$

7) $S=\{2;-3\}$

8) $S=\left\{-2;\frac{1}{3}\right\}$

## Ejercicio A.4

1) $S=(-4;2)$

2) $S=(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$

3) $S=\mathbb{R}$

4) $S=(-2;2)$

5) $S=(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$

6) $S=(-3;1)$

7) $S=\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup[3;+\infty)$

8) $S=\left[-2;\frac{1}{2}\right]$

## Ejercicio A.5

1) $x^4$

2) $m^9.h^{13}$

3) $x^{-\frac{11}{6}}$

4) $x^{\frac{5}{6}}$

## Ejercicio A.6

1) $\sqrt{2x^4.y^6}$

2) $\sqrt[4]{\frac{8a^7}{3c^4}}$

## Ejercicio A.7

1) $4a^2.x^{10}.\sqrt{2x}$

2) $\frac{3x^4}{m^5}\sqrt[3]{3x^2}$

## Ejercicio A.8

1) $4\sqrt{3}$

2) $3x^2.\sqrt{x}$

3) $15\sqrt[3]{2a}$

4) $13\sqrt[3]{2}-4\sqrt[3]{3}$

## Ejercicio A.9

1) $\sqrt[6]{2^4.x^3}$

2) $\sqrt[12]{2}$

3) $\frac{3\sqrt{10}-6}{2}$

4) $\frac{1}{x}\sqrt[18]{x}$

## Ejercicio A.10

1) $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6}$

2) $\frac{(x+2)\sqrt{2x}+4x}{2x}$

3) $\frac{\sqrt[12]{3^7.m^{11}}}{3m}$

4) $\sqrt{\sqrt{2}-1}$

**TRAMO B**

**VERIFICACIÓN 14**

1) Cuatrinomio, grado 3, coeficiente principal 1 y término independiente 6.

2) Trinomio, grado 5, coeficiente principal -2 y término independiente 4.

3) Binomio, grado 2, coeficiente principal 5 y término independiente 0.

# CONTROL DE LOS RESULTADOS

## APLICACIÓN 14

### Ejercicio 14.1
**2), 4) y 6)**

### Ejercicio 14.2
**1)** Cuatro
**2)** Cinco
**3)** Tres
**4)** Uno

### Ejercicio 14.3
Son algunas de las posibles soluciones.
**1)** $x^2 + 1$
**2)** $x^3 + 2x - 1$
**3)** $5x^6$
**4)** $x^5 + 2x^2 + x - 1$

### Ejercicio 14.4
**1)** Binomio de grado 3.
**2)** Monomio de grado 1.
**3)** Trinomio de grado 2.
**4)** Binomio de grado 1.
**5)** Cuatrinomio de grado 3.
**6)** Monomio de grado 1.

### Ejercicio 14.5
**1)** $5x^3 + 0x^2 + 0x - 1$
**2)** $x^4 - 27x^3 + 0x^2 + 0x + 2$
**3)** $2x^3 + 0x^2 - x - 2$
**4)** $x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x - 1$

## VERIFICACIÓN 15

**1)** $-6x$

**2)** $-\frac{1}{6}x^2$

**3)** $-\sqrt{2}x^4$

## APLICACIÓN 15

### Ejercicio 15.1
**1)** $4x^3 + 5x^2 - 3x$

**2)** $5x^4 + \frac{3}{2}x^3$

**3)** $-\frac{7}{2}x^5 + x^3$

**4)** $-x^3 + 5x^2 + 45x$

### Ejercicio 15.2
**1)** $-\frac{3}{2}x^3 - x^2 + \frac{5}{2}x - 1$

**2)** $-\frac{5}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{7}{2}x + 7$

**3)** $-2x^3 + 2x^2 - \frac{11}{2}x + 5$

**4)** $-\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 8x + 6$

### Ejercicio 15.3
**1)** $-x^2 - 2x - 3$
**2)** $x^2 + 2x - 1$

## VERIFICACIÓN 16

**1)** $-12x^3$

**2)** $-4x^5$

**3)** $\frac{5}{6}x^9$

## APLICACIÓN 16

### Ejercicio 16.1
**1)** $\frac{2}{3}x^4 - 10x^3$

**2)** $-6x^5 + 3x^4 - 12x^3$

**3)** $-x^6 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{9}{2}x^4$

**4)** $9x^4 - \frac{1}{4}$

**5)** $25x^{12} - 4x^2$

**6)** $\frac{9}{16}x^6 - \frac{1}{36}x^2$

### Ejercicio 16.2
**1)** $x^5 - x^4 - x^3 + 2x^2 - x$
**2)** $x^8 - x^7 - x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 3x - 2$
**3)** $-3x^5 + 2x^4 + 3x^3 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{3}x$

**4)** $6x^5 - 4x^4 - 11x^3 + \frac{15}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}$

### Ejercicio 16.3
**1)** $-3x^2 - 6x - 7$

**2)** $\frac{5}{2}x^2 + x + \frac{17}{2}$

### Ejercicio 16.4
**1)** $16x^3 - 15x - 10$
**2)** $-12x^5 - 26x^4 + 22x^3 + 10x^2 + 35x - 14$

## VERIFICACIÓN 17

**1)** $-2x^3$

**2)** $-\frac{1}{6}x^2$

**3)** $\frac{5}{2}x^5$

## APLICACIÓN 17

### Ejercicio 17.1
**1)** $-2x^2 + 4x - 1$

**2)** $\frac{2}{5}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x$

**3)** $-\frac{5}{3}x^3 + 25x^2 - 15x + 2$

**4)** $18x^2 - \frac{9}{2}x + 6$

**5)** $\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$

### Ejercicio 17.2
**1)** Cociente: $2x^2 - 6x + 1$
Resto: $-4$
**2)** Cociente: $3x^2 - 27x + 81$
Resto: $-79$
**3)** Cociente: $5x + 5$
Resto: $x - 3$
**4)** Cociente: $2x^2 + x - 1$
Resto: $-2x + 1$

## VERIFICACIÓN 18

Cociente: $5x + 12$
Resto: 40

## APLICACIÓN 18

### Ejercicio 18.1
**1)** Cociente: $2x^2 + 4x + 11$
Resto: 21
**2)** Cociente: $3x^2 - 5x + 5$
Resto: $-7$

**3)** Cociente: $-x^3 + 3x^2 - 9x + 3$
Resto: $-4$

**4)** Cociente: $-x^4 + 4x^3 - 4x^2 + x - 4$
Resto: $0$

## Ejercicio 18.2

**1)** $55$
**2)** $171$
**3)** $-5$
**4)** $7$

## Ejercicio 18.3

**1)** y **3)**

## VERIFICACIÓN 19

**1)** $64x^6$
**2)** $9x^8$
**3)** $-\frac{1}{32}x^{15}$
**4)** $-\frac{8}{27}x^{18}$
**5)** $\frac{81}{256}x^{32}$
**6)** $-\frac{1}{1.000}x^{27}$

## APLICACIÓN 19

## Ejercicio 19.1

**1)** $x^2 + 10x + 25$
**2)** $4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$
**3)** $x^{10} - 2x^5 + 1$
**4)** $\frac{1}{9}x^2 + 2x + 9$
**5)** $9x^6 + 6x^4 + x^2$
**6)** $x^8 - x^7 + \frac{1}{4}x^6$

## Ejercicio 19.2

**1)** $64 + 48x + 12x^2 + x^3$
**2)** $125x^3 + \frac{75}{2}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{1}{8}$
**3)** $x^{15} - 3x^{10} + 3x^5 - 1$
**4)** $-x^3 - 6x^2 - 12x - 8$
**5)** $-27x^9 - 54x^8 - 36x^7 - 8x^6$

## Ejercicio 19.3

**1)** $3x^2 - 4x + 4$
**2)** $-x^3 + 3x^2 + \frac{23}{2}x + 8$

## INTEGRACIÓN B

## Ejercicio B.1

**1)** $8x^4 - 3x^3 + x^2 + 0x + 0$
**2)** $5x^4 + 0x^3 + x^2 + 6x - 2$
**3)** $-x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + x + 4$
**4)** $x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1$
**5)** $-\frac{1}{2}x^3 + 0x^2 + 0x - \frac{2}{3}$

## Ejercicio B.2

**1)** $\frac{3}{2}x^3 + 8x^2 - 5x$
**2)** $-\frac{5}{2}x^3 - 2x^2 + x$
**3)** $-2x^4 + \frac{1}{2}x^3 + 8x^2 - 6x$
**4)** $2x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 8x^2 - 4x$

## Ejercicio B.3

**1)** $5x^2 - 11x + 10$
**2)** $\frac{13}{2}x^2 - \frac{15}{2}x - \frac{13}{2}$

## Ejercicio B.4

**1)** $3x^4 - 7x^2 + 4x$
**2)** $11x^3 - 3x$
**3)** $9x^3 + 6x^2 - 6$
**4)** $8x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 8x$

## Ejercicio B.5

**1)** $\frac{1}{3}x^5$
**2)** $-2x^5$
**3)** $5x^{10}$
**4)** $\frac{1}{10}x^8$
**5)** $\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - x^2 + 3x - 3$
**6)** $-4x^5 + 6x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x$
**7)** $3x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2$
**8)** $x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 4x$

## Ejercicio B.6

**1)** $x^2 - 16$
**2)** $4x^2 - 25$
**3)** $x^4 - \frac{1}{9}$
**4)** $9x^4 - 0{,}25$
**5)** $36x^6 - x^2$
**6)** $\frac{1}{4}x^{10} - 100$

## Ejercicio B.7

**1)** $4x - 3$
**2)** $2x^5 - 6x^3 + 6x^2 - 2x - 4$
**3)** $2x^4 + 9x^3 - 5x^2 - 6$
**4)** $2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x$

## Ejercicio B.8

**1)** $4x^2$
**2)** $-2x^2$
**3)** $-\frac{4}{15}x^7$
**4)** $12x$

## Ejercicio B.9

**1)** $x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$
**2)** $-6x^3 - x^2 + 3$
**3)** $-3x^3 + \frac{1}{15}$
**4)** $\frac{9}{25}x^2$
**5)** $-\frac{9}{5}x^2 + 5$

## Ejercicio B.10

**1)** Cociente: $x^2 - 2x - 4$
Resto: $-25$

**2)** Cociente: $x^2 + 2x - 2$
Resto: $-x$

**3)** Cociente: $x^2 + 4x + 2$
Resto: $2x + 4$

**4)** Cociente: $x - 5$
Resto: $0$

# CONTROL DE LOS RESULTADOS

## Ejercicio B.11

1) Cociente: $-x^3 + 3x^2 - 3x + 4$
Resto: $-7$
2) Cociente: $-2x^3 + 6x^2 - 2x + 3$
Resto: $-11$
3) Cociente: $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$
Resto: $0$
4) Cociente: $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{5}{3}$
Resto: $\frac{4}{3}$

## Ejercicio B.12

1) $-2$
2) $13$
3) $\frac{13}{27}$
4) $-\frac{35}{3}$

## Ejercicio B.13

1) y **4)**

## Ejercicio B.14

1) $16x^2 + 24x + 9$
2) $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$
3) $49x^4 + 14x^3 + x^2$
4) $36x^6 - 24x^4 + 4x^2$

## Ejercicio B.15

1) $x^{15} + 3x^{10} + 3x^5 + 1$
2) $x^{12} - 6x^8 + 12x^4 - 8$
3) $125x^6 - 150x^7 + 60x^8 - 8x^9$
4) $-x^3 - 18x^5 - 108x^7 - 216x^9$

## Ejercicio B.16

1) $6x^2 - 8x + 1$
2) $x^3 - 4x^2 + 4x$
3) $9x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 4x - 4$
4) $-13x^6 + 12x^4$
5) $48x^8 - 72x^7 + 27x^6$
6) $-5x + 3$
7) $32x^6$

TRAMO C

## VERIFICACIÓN 20

**1), 2)** y **5)**

## APLICACIÓN 20

## Ejercicio 20.1

1) $12x^2 - 4x + 4 = 4(3x^2 - x + 1)$
2) $x^7 + x^5 = x^5.(x^2 + 1)$
3) $x^7 + (-3)x^5 - 5x^3 = x^3(x^4 - 3x^2 + (-5))$
4) $3x^4 + 24x = 3x(x^3 + 8)$
5) $-x^4 + (-5x^3) - 6x^2 = -x^2(x^2 + 5x + 6)$
6) $15x^8 + 48x^4 = 3x^4.(5x^4 + 16)$

## Ejercicio 20.2

1) $6x^2(4x^3 + 3x^2 - 5)$
2) $\frac{3}{4}x\left(\frac{5}{4}x^3 - \frac{7}{10}x^2 - \frac{3}{7}\right)$
3) $(x^3 + 1)(x - 1)$
4) $(2x^2 + 3)(2x - 1)$
5) $(x^5 + x^3 + 2)(x + 2)$
6) $(x^4 + 3x^2 + 4)(2x - 1)$

## VERIFICACIÓN 21

1) $(1 - x)(1 + x)$
2) $(x^2 - 6)(x^2 + 6)$
3) $\left(x - \frac{7}{11}\right)\left(x + \frac{7}{11}\right)$
4) $(5x - 2)(5x + 2)$
5) $(x^3 - 10)(x^3 + 10)$
6) $(x - 5)(x + 5)(x^2 + 25)$

## APLICACIÓN 21

## Ejercicio 21.1

1) $(x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$
2) $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\right)$
3) $(x - 2)(x + 2)(x^4 + 4x^2 + 16)$
4) $\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x^2 + \frac{1}{9}\right)$

## VERIFICACIÓN 22

**3), 4)** y **5)**

## APLICACIÓN 22

## Ejercicio 22.1

1) F
2) V
3) F
4) V
5) F
6) V

## Ejercicio 22.2

1) $(2x - 1)^2$
2) $(x^3 + 2)^2$
3) $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$
4) $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2$

## Ejercicio 22.3

1) $(x + 5)^3$
2) $(x - 4)^3$
3) $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^3$
4) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^3$

## VERIFICACIÓN 23

1) $x_1 = 3$, multiplicidad 2
$x_2 = -3$, multiplicidad 2
2) $x_1 = -1$, multiplicidad 5
$x_2 = 0$, multiplicidad 2
3) $x_1 = \frac{3}{4}$, multiplicidad 3
$x_2 = -2$, multiplicidad 1
4) $x_1 = -4$, multiplicidad 1
$x_2 = -1$, multiplicidad 4

## APLICACIÓN 23

### Ejercicio 23.1

1) $-(x+1)(x-3)(x-2)$

2) $-4\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)$

3) $-4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$
$(x-1)(x-2)$

4) $(x+2)(x-1)^2$

5) $(x+1)(x-1)(x+3)^2$

6) $(x+1)^2.(x+2)^2$

## VERIFICACIÓN 24

1) a) Factor común -4
   b) Trinomio cuadrado perfecto

2) a) Factor común en grupos
   b) Diferencia de cuadrados

3) a) Factor común -2
   b) Cuatrinomio cubo perfecto

## APLICACIÓN 24

### Ejercicio 24.1

1) $x^2.(x+1)(x-1)$

2) $x\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

3) $x^2.\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{4}\right)$

4) $\frac{2}{9}(x-2)(x^2+2x+4)$

5) $(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)$

6) $-x^2.\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$

### Ejercicio 24.2

1) F
2) F
3) V
4) F
5) V
6) F

### Ejercicio 24.3

1) $-4\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)(x+1)$

2) $(x^2-4x+16)(x+4)(x-1)$

3) $-4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+1)$

4) $x(x-1)(x+1)^2$

### Ejercicio 24.4

1) $3x(x+2)(x-2)(2x-1)$

2) $(3x^2-1)(x+1)(x-1)$

3) $5x(2x-3)^2$

4) $(x^2+2x+4)(x+2)(x-2)^2$

5) $\frac{1}{2}x(x-2)^3$

6) $\frac{3}{4}x^2.\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

## VERIFICACIÓN 25

1) $S=\{0;-1;-2\}$

2) $S=\left\{\frac{1}{4};-\frac{2}{3}\right\}$

3) $S=\left\{0;1;\frac{1}{2}\right\}$

## APLICACIÓN 25

### Ejercicio 25.1

1) $S=\{0;1;-1\}$

2) $S=\{0;1\}$

3) $S=\{3\}$

4) $S=\{0;-3;5\}$

## INTEGRACIÓN C

### Ejercicio C.1

1) $3\left(x-\frac{3}{5}\right)\left(x+\frac{3}{5}\right)$

2) $-5\left(x-\frac{9}{5}\right)\left(x+\frac{9}{5}\right)$

3) $-\frac{1}{3}(x-2)(x+2)(x^2+4)$

4) $\frac{7}{4}\left(x-\frac{4}{7}\right)\left(x+\frac{4}{7}\right)$

### Ejercicio C.2

1) $\frac{1}{2}(x+5)^2$

2) $-\frac{1}{3}(x+2)^3$

3) $-4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$

4) $2\left(x-\frac{3}{2}\right)^3$

### Ejercicio C.3

1) $\frac{1}{4}(x-1)(x+3)$

2) $-\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+7)$

3) $-2\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

4) $5(x+3)\left(x-\frac{3}{5}\right)$

5) $4\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)$

6) $-\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{5}\right)(x-5)$

### Ejercicio C.4

1) $3\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$

2) $2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2$

3) $16\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}x+\frac{1}{16}\right)$

### Ejercicio C.5

1) $2(x-1)\left(x+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

2) $(x-2)(-2x^2-x-2)$

3) $-6(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$

### Ejercicio C.6

1) $(x-2)(x+2)^2$

2) $-3(x-1)(x+1)^3$

3) $-(x-1)(x+5)^2$

4) $(x-4)(x+4)(x+1)^2$

### Ejercicio C.7

1) c

# CONTROL DE LOS RESULTADOS

**2)** d
**3)** c
**4)** b

### Ejercicio C.8

**1)** $S = \{1;-2;-4;3\}$
**2)** $S = \{1;3\}$
**3)** $S = \{-2\}$

### Ejercicio C.9

**1)** $(4x^3 - 36x^2 + 80x)cm^3$
**2)** Altura: 1 cm; ancho: 6 cm y largo: 8 cm;
o altura: 2 cm; ancho: 4 cm y largo: 6 cm.

TRAMO D

**VERIFICACIÓN 26**

**2)** y **4)**

**APLICACIÓN 26**

### Ejercicio 26.1

**1)** $\frac{x+2}{x}$

**2)** $\frac{1}{x-3}$

**3)** $\frac{x+2}{x-5}$

**4)** $\frac{x}{x+2}$

**5)** $(x+2)(x^2+4)$

**VERIFICACIÓN 27**

**1)** $\frac{2x^3}{3}$

**2)** $\frac{7x^5}{2}$

**APLICACIÓN 27**

### Ejercicio 27.1

**1)** $\frac{2}{x^2}$

**2)** $-4x$

### Ejercicio 27.2

**1)** 1

**2)** $\frac{x-2}{x+1}$

**VERIFICACIÓN 28**

**1)** $-\frac{2}{x}$

**2)** $\frac{x^2+2x+2}{2x}$

**3)** $\frac{5}{x}$

**4)** $\frac{x-6}{2(x-3)}$

**APLICACIÓN 28**

### Ejercicio 28.1

**1)** 2

**2)** $\frac{3x}{2}$

**3)** $-x-1$

**4)** $\frac{2x}{3}$

**5)** $\frac{x+1}{x-1}$

### Ejercicio 28.2

**1)** $\frac{18x+4}{x^2-4}$

**2)** $2x+6$

**3)** $\frac{4}{x}$

**4)** $\frac{x}{x-2}$

**5)** $-\frac{9}{(x+5)(x-4)}$

**6)** $-1$

**7)** $\frac{1}{(x^2+1)(x+1)}$

**8)** $\frac{3(x-2)(x+2)}{x}$

**VERIFICACIÓN 29**

$\frac{x}{x+1}$

**APLICACIÓN 29**

### Ejercicio 29.1

**1)** $\frac{x-1}{x+1}$

**2)** $\frac{x-1}{x-3}$

### Ejercicio 29.2

**1)** $\frac{-4x+29}{(x-7)(x-4)}$

**2)** $\frac{x^5-x^4+1}{x^2}$

**3)** $\frac{2(x^2+1)}{x^2-1}$

**4)** $-\frac{10}{(x+1)(x+5)}$

**VERIFICACIÓN 30**

d)

**APLICACIÓN 30**

### Ejercicio 30.1

**1)** $S = \{3\}$
**2)** $S = \{1;3\}$
**3)** $S = \{4\}$
**4)** $S = \{2;-2\}$

**INTEGRACIÓN D**

### Ejercicio D.1

**1)** $\frac{x-3}{x+3}$

**2)** $\frac{12x-6}{x}$

**3)** $-\frac{x+7}{2x-2}$

**4)** $-\frac{2}{x-1}$

**5)** $\frac{x-3}{2x-4}$

**6)** $\frac{x^2+3x+9}{2}$

### Ejercicio D.2

**1)** $\frac{1}{x-5}$

2) $-\frac{4x}{x^2-1}$

3) $\frac{x-1}{2x-4}$

4) $\frac{x+6}{3x+9}$

### Ejercicio D.3

1) $\frac{(x+3)(x+1)}{2(x-1)}$

2) $\frac{x^2+1}{x^2}$

3) $\frac{(x+1)(x-1)(x+2)}{x-2}$

4) $\frac{1}{(x+2)(x^2+4)}$

### Ejercicio D.4

$\frac{x+3}{x+2}$

### Ejercicio D.5

1) $S = \{1;-2\}$

2) $S = \{10\}$

3) $S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

4) $S = \{10\}$

5) $S = \{0;2\}$

6) $S = \left\{0;-\frac{1}{2}\right\}$

### Ejercicio D.6

1) $S = \left\{\frac{3}{2};-1\right\}$

2) $S = \{-2;-3\}$

3) $S = \varnothing$

4) $S = \{1;-1\}$

TRAMO 8

## VERIFICACIÓN 31

1) $y = 2x$

2) $y = x - 3$

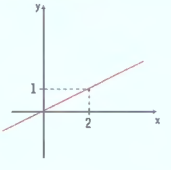
3) $y = -4x$

4) $y = -x - 1$

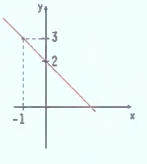
## APLICACIÓN 31

### Ejercicio 31.1

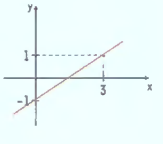
1)



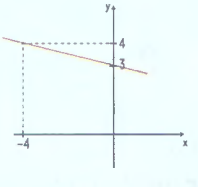

2)




3)




4)




## VERIFICACIÓN 32

1) F

2) V

3) F

4) V

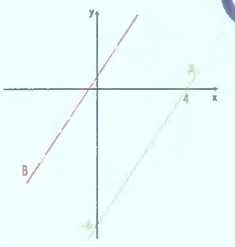
5) V

6) F

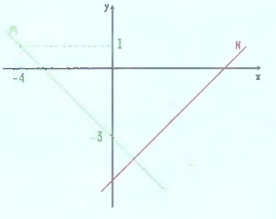
## APLICACIÓN 32

### Ejercicio 32.1

1)

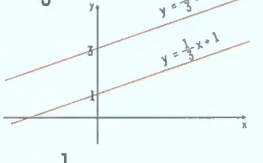



2)

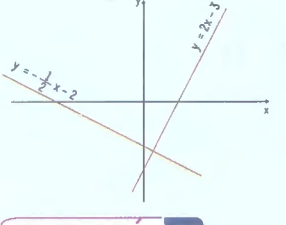



### Ejercicio 32.2

1) $y = \frac{1}{3}x + 3$




2) $y = -\frac{1}{2}x - 2$




## VERIFICACIÓN 33

1) $y = -\frac{3}{2}x + 3$

$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

2) $y = 2x + 2$

$\frac{x}{-1} + \frac{y}{2} = 1$

3) $y = -3$

$\frac{y}{-3} = 1$

## APLICACIÓN 33

### Ejercicio 33.1

1) $\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$

2) $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$

# CONTROL DE LOS RESULTADOS

**3)** $\dfrac{\frac{x}{3}}{\frac{4}{}} + \dfrac{y}{-\frac{1}{2}} = 1$

### Ejercicio 33.2

**1)** $y = -\frac{5}{2}x + 5$

**2)** $y = 6x - 2$

**3)** $y = \frac{1}{10}x + \frac{1}{4}$

### Ejercicio 33.3

**1)** $y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$

**2)** $y = -\frac{3}{7}x + \frac{12}{7}$

### Ejercicio 33.4

**1)** $y = x + 3$

**2)** $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

**3)** $y = -3x - 4$

**4)** $y = \frac{2}{5}x + \frac{19}{5}$

### Ejercicio 33.5

**1)** A: $y = -2x + 7$

**2)** B: $y = 2x - 4$

**3)** C: $y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$

**4)** D: $y = -\frac{2}{3}x + 3$

### Ejercicio 33.6

$y = -x - 1$

## VERIFICACIÓN 34

**1)** $\sqrt{58}$

**2)** $\frac{3\sqrt{13}}{13}$

## APLICACIÓN 34

### Ejercicio 34.1

17,14

### Ejercicio 34.2

1

### Ejercicio 34.3

$2\sqrt{10}$

## VERIFICACIÓN 35

**1)** $y = |x - 1|$

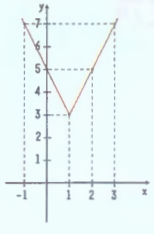
**2)** $y = |x + 1| + 1$

**3)** $y = |x + 2| - 3$

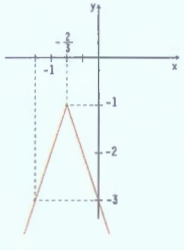
## APLICACIÓN 35

### Ejercicio 35.1

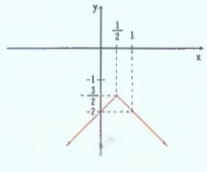
**1)**



**2)**



**3)**



## VERIFICACIÓN 36

**1)** Compatible determinado.

**2)** Incompatible.

**3)** Compatible indeterminado.

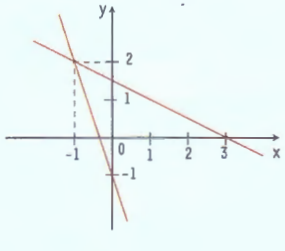
**4)** Compatible determinado.

## APLICACIÓN 36

### Ejercicio 36.1

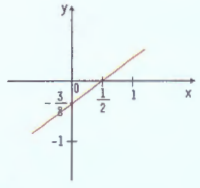
**1)** $S = \{(-1;2)\}$

Compatible determinado



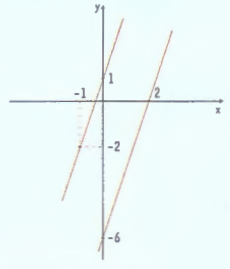
**2)** $S = \left\{(x;y)/y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}\right\}$

Compatible indeterminado



**3)** $S = \varnothing$

Incompatible



## VERIFICACIÓN 37

$\begin{cases} -12x + 10y = -4 \\ -12x + 9y = -21 \end{cases}$

## APLICACIÓN 37

### Ejercicio 37.1

**1)** $S = \left\{\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right)\right\}$

**2)** $S = \{(3;1)\}$

### Ejercicio 37.2

**1)** $S = \left\{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)\right\}$

**2)** $S = \left\{\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}\right)\right\}$

### Ejercicio 37.3

**1)** $S = \left\{\left(1; \frac{3}{2}\right)\right\}$

**2)** $S = \{(-2;6)\}$

### Ejercicio 37.4

**1)** $S = \{(1;3)\}$

**2)** $S = \{(3;2)\}$

## Ejercicio 37.5

**1)** 8 y 11
**2)** 37 y 73
**3)** 17 de $ 0,25 y 15 de $ 0,05
**4)** 15 cm

## VERIFICACIÓN 38

**1)** $y \geq \frac{1}{2}x - 1$

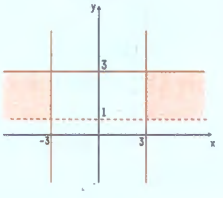
**2)** $|x| < 1$

**3)** $y < 0$

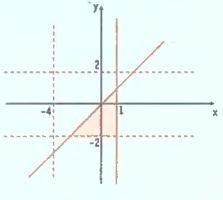
## APLICACIÓN 38

### Ejercicio 38.1

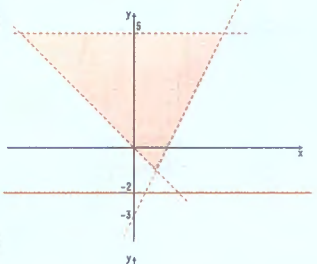
**1)**



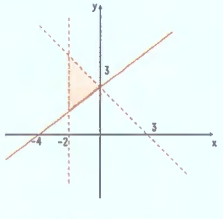
**2)**



**3)**



**4)**



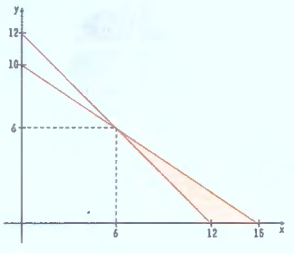
## VERIFICACIÓN 39

30 remeras y 20 pantalones.

## APLICACIÓN 39

### Ejercicio 39.1

**1)**



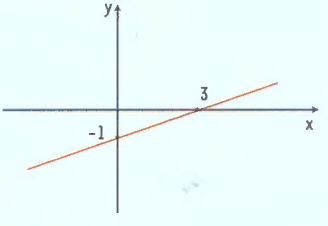
**2)** 15 teóricos y ninguno práctico.

**3)** 150 puntos.

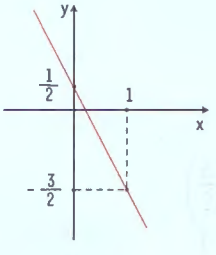
## INTEGRACIÓN E

### Ejercicio E.1

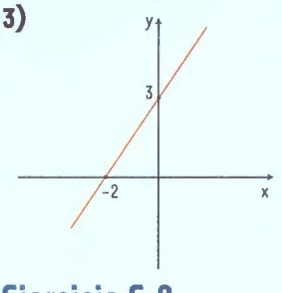
**1)**



**2)**



**3)**



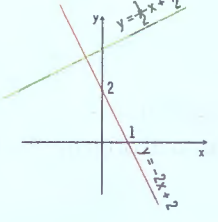
### Ejercicio E.2

**1)** R: $y = -2x + 2$

**2)** b), d) y e)

**3)** P: $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

**4)** $P \cap R = \left\{\left(-\frac{3}{5}; \frac{16}{5}\right)\right\}$



### Ejercicio E.3

**1)** $\overline{ab} = 2$
$\overline{bc} = \sqrt{17}$
$\overline{ac} = \sqrt{17}$

$\triangle abc$ isósceles

**2)** $\overline{mp} = \sqrt{10}$
$\overline{pn} = \sqrt{5}$
$\overline{mn} = 1$

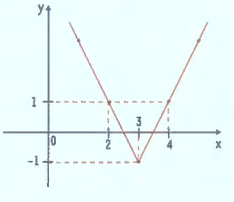
$\triangle mpn$ escaleno

### Ejercicio E.4

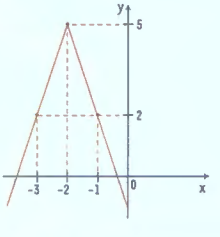
$D_{(T,m)} = \frac{2}{5}$

### Ejercicio E.5

**1)**

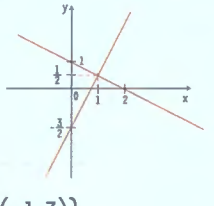


**2)**

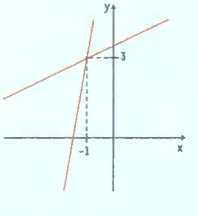


### Ejercicio E.6

**1)** $S = \left\{\left(1; \frac{1}{2}\right)\right\}$

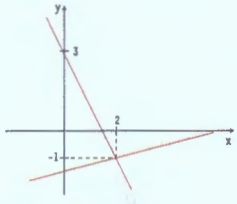


**2)** $S = \{(-1;3)\}$



# CONTROL DE LOS RESULTADOS

**3)** $S = \{(2;-1)\}$



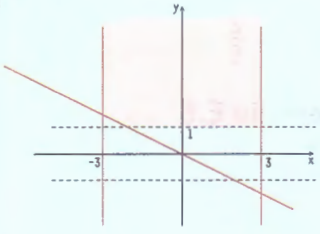
## Ejercicio E.7

**1)** 66° y 144°

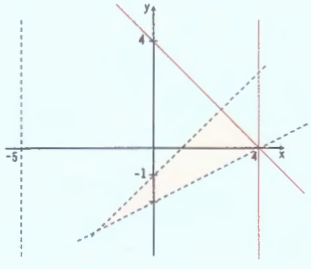
**2)** 42 y 60 años

## Ejercicio E.8

**1)**

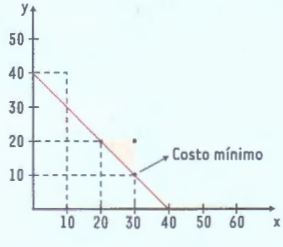


**2)**

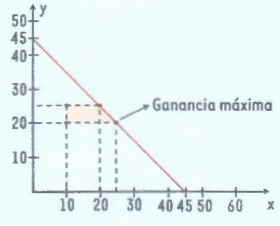


## Ejercicio E.9

**1)** 30 minutos en horario normal y 10 minutos en hora pico, con un costo de $ 13.500.




**2)** 25 kg del compuesto A y 20 kg del B, con una ganancia de $ 535.




TRAMO F

### VERIFICACIÓN 40

**1)** >; >; <; =

**2)** <; <; <; >

### APLICACIÓN 40

## Ejercicio 40.1

**1)** $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$

**2)** $y = -2x^2 + \frac{1}{2}x$

## Ejercicio 40.2

**1)** V

**2)** F

**3)** F

**4)** V

### VERIFICACIÓN 41

**1)** $a = -3$, $b = 1$ y $c = 2$

**2)** $\left(\frac{1}{6}; \frac{25}{12}\right)$

**3)** $x = \frac{1}{6}$

**4)** (0;2)

**5)** $x_1 = -\frac{2}{3}$ y $x_2 = 1$

### APLICACIÓN 41

## Ejercicio 41.1

**1)** $a = -1$, $b = 0$ y $c = 2$

$x_1 = \sqrt{2}$ y $x_2 = -\sqrt{2}$

Vértice: (0;2)

Eje de simetría: $x = 0$

Ordenada al origen: (0;2)

**2)** $a = 2$, $b = 4$ y $c = -1$

$x_1; x_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}$

Vértice: (-1;-3)

Eje de simetría: $x = -1$

Ordenada al origen: (0;-1)

**3)** $a = 1$, $b = -4$ y $c = -5$

$x_1 = 5$ y $x_2 = -1$

Vértice: (2;-9)

Eje de simetría: $x = 2$

Ordenada al origen: (0;-5)

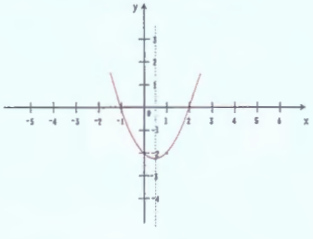
## Ejercicio 41.2

**1)** Vértice: $\left(\frac{1}{2}; -\frac{9}{4}\right)$

Raíces: $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$

Eje de simetría: $x = \frac{1}{2}$

Ordenada al origen: (0;-2)

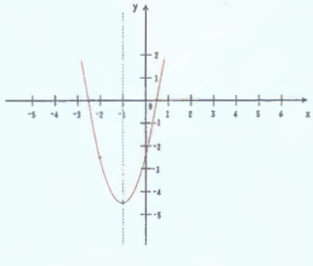


**2)** Vértice: $\left(-1; -\frac{9}{2}\right)$

Raíces: $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = -\frac{5}{2}$

Eje de simetría: $x = -1$

Ordenada al origen: $\left(0; -\frac{5}{2}\right)$

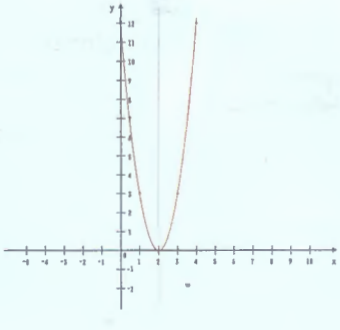


**3)** Vértice: (2;0)

Raíces: $x_1 = x_2 = 2$

Eje de simetría: $x = 2$

Ordenada al origen: (0;12)

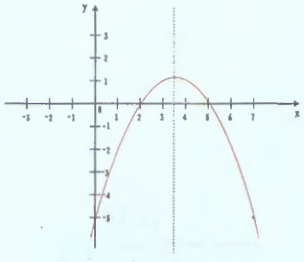


**4)** Vértice: $\left(\frac{7}{2};\frac{9}{8}\right)$

Raíces: $x_1 = 2$ y $x_2 = 5$

Eje de simetría: $x = \frac{7}{2}$

Ordenada al origen: $(0;-5)$

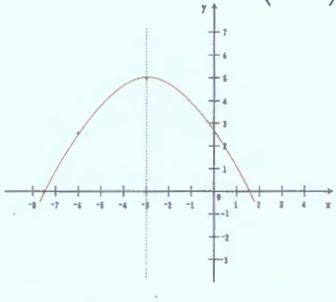


**5)** Vértice: $(-3;5)$

Raíces: $x_1 \cong -7{,}47$ y $x_2 \cong 1{,}47$

Eje de simetría: $x = -3$

Ordenada al origen: $\left(0;\frac{11}{4}\right)$



**VERIFICACIÓN 42**

**1)** =
**2)** >
**3)** <
**4)** >

**APLICACIÓN 42**

## Ejercicio 42.1

**1)** $\Delta = 32$; raíces reales distintas.
**2)** $\Delta = -7$; no tiene raíces reales.
**3)** $\Delta = 0$; raíces reales iguales.
**4)** $\Delta = 12$; raíces reales distintas.
**5)** $\Delta = 0$; raíces reales iguales.

## Ejercicio 42.2

**1)** $k_1 = 0 \vee k_2 = 1$
$f_1(x) = x^2 \vee f_2(x) = x^2 + 2x + 1$

**2)** $k = -1$
$f(x) = x^2 - 2x + 1$

**VERIFICACIÓN 43**

**1)** $f(x) = (x-2)^2 - 1$
**2)** $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$
**3)** $f(x) = 2x^2 - 12x + 16$
**4)** $f(x) = -(x+1)(x-3)$

**APLICACIÓN 43**

## Ejercicio 43.1

**1)** $y = -2(x+3)^2 - 2$
$y = -2x^2 - 12x - 20$

**2)** $y = -(x+4)(x-2)$
$y = -x^2 - 2x + 8$

**3)** $y = \frac{1}{3}(x+3)^2 - 2$

$y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$

**4)** $y = -\frac{5}{144}(x+1)(x-4)$

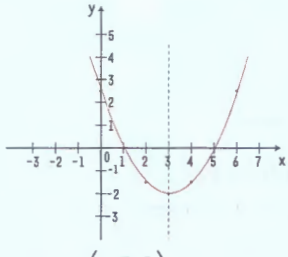
$y = -\frac{5}{144}x^2 + \frac{5}{48}x + \frac{5}{36}$

## Ejercicio 43.2

**1)** Vértice: $(3;-2)$

Eje de simetría: $x = 3$

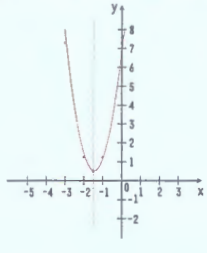
Raíces: $x_1 = 5$ y $x_2 = 1$



**2)** Vértice: $\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$

Eje de simetría: $x = -\frac{3}{2}$

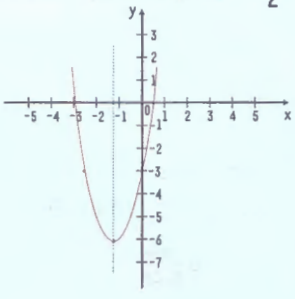
No tiene raíces reales



**3)** Vértice: $\left(-\frac{5}{4};-\frac{49}{8}\right)$

Eje de simetría: $x = -\frac{5}{4}$

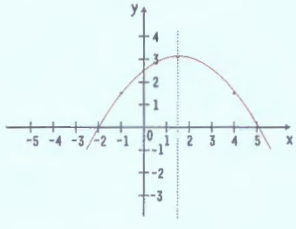
Raíces: $x_1 = -3$ y $x_2 = \frac{1}{2}$



**4)** Vértice: $\left(\frac{3}{2};\frac{49}{16}\right)$

Eje de simetría: $x = \frac{3}{2}$

Raíces: $x_1 = 5$ y $x_2 = -2$



## Ejercicio 43.3

**1)** $y = -x^2 - 4x + 3$

**2)** $y = \frac{1}{3}x^2 - x - \frac{4}{3}$

## Ejercicio 43.4

**1)** $x^2 + \frac{1}{10}x - \frac{1}{5} = 0$

**2)** $x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{7}{18} = 0$

**3)** $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$

**VERIFICACIÓN 44**

**1)** Máximo; $(-\infty;4)$; $(4;+\infty)$
**2)** Mínimo; $(-3;+\infty)$; $(-\infty;-3)$

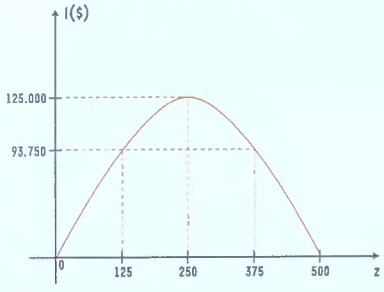
**APLICACIÓN 44**

## Ejercicio 44.1

**1)** 250 pares.
**2)** $ 93.750 en ambos casos.

# CONTROL DE LOS RESULTADOS

**3)** A partir de los 500 pares.




## Ejercicio 44.2

**1)** Los números son -3 y 3.
El menor producto es -9.

**VERIFICACIÓN 45**

**1)** $>$
**2)** $=$
**3)** $<$

**APLICACIÓN 45**

## Ejercicio 45.1

**1)** Una
**2)** Dos
**3)** Ninguna
**4)** Una
**5)** Ninguna
**6)** Dos

## Ejercicio 45.2

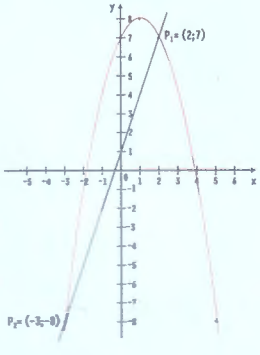
**1)** $k > -\frac{25}{12}$

**2)** $k = -\frac{25}{12}$

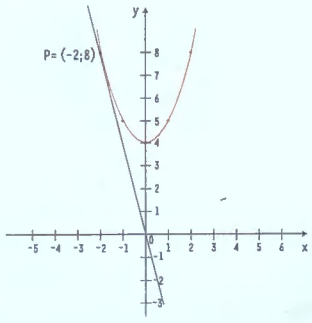
**3)** $k < -\frac{25}{12}$

## Ejercicio 45.3

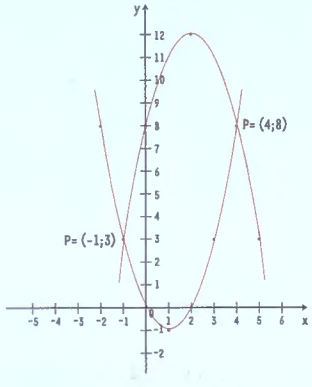
**1)** $S = \{(2;7),(-3;-8)\}$



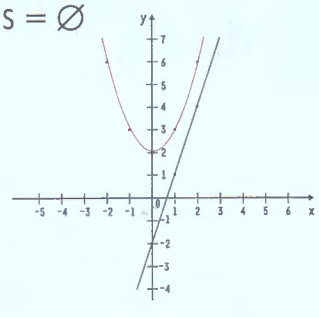

**2)** $S = \{(-2;8)\}$




**3)** $S = \{(4;8),(-1;3)\}$




**4)** $S = \varnothing$



**INTEGRACIÓN F**

## Ejercicio F.1

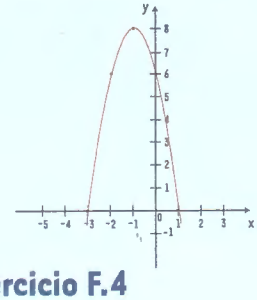
**1)** De ambas formas
**2)** (-3;-4)
**3)** $x_1 = -4$ y $x_2 = 4$
**4)** -15
**5)** $-2(x + 2)(x - 4)$

## Ejercicio F.2

**1)** d
**2)** c
**3)** a
**4)** b

## Ejercicio F.3

Vértice: (-1;8)
Eje de simetría: $x = -1$
Ordenada al origen: (0;6)
Forma canónica:
$y = -2(x + 1)^2 + 8$
Forma factorizada:
$y = -2(x + 3)(x - 1)$



## Ejercicio F.4

**1)** II
**2)** VI
**3)** IV
**4)** V
**5)** VII

## Ejercicio F.5

$y = -\frac{8}{9}(x - 7)^2 + 8$

## Ejercicio F.6

$k > \frac{9}{4}$

## Ejercicio F.7

$y_1 = -x - \frac{1}{2}$

$y_2 = -x + 2$

## Ejercicio F.8

$y_1 = 12x - 11$

## Ejercicio F.9

$\frac{128}{3}$

## Ejercicio F.10

**1)** 5
**2)** -5

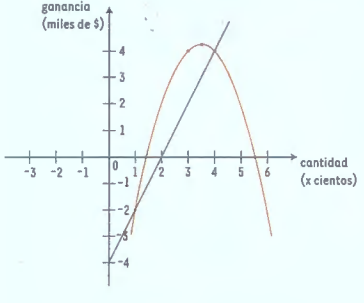
### Ejercicio F.11
**1)** 11 años.
**2)** 26 años y 3 meses aprox.

### Ejercicio F.12
Cuadrado de lado 12,5 cm.

### Ejercicio F.13
20 y 20

### Ejercicio F.14
c)

### Ejercicio F.15
**1)** 400
**2)** Lápices: menos de 144 o más de 556 cajas.
Cuadernos: menos de 200 cajas.




TRAMO G

## VERIFICACIÓN 46
**1)** a) Orden par
b) Orden impar
**2)** a) Orden par
b) Orden impar
c) Orden impar
**3)** a) Orden impar

## APLICACIÓN 46

### Ejercicio 46.1
**1)** a)
**2)** c)

### Ejercicio 46.2
**1)** $x = 0$; orden de multiplicidad 3
$x = 1$; orden de multiplicidad 2
**2)** $x = 5$; orden de multiplicidad 1
$x = 3$; orden de multiplicidad 1
$x = -2$; orden de multiplicidad 1
**3)** $x = 2$; orden de multiplicidad 1
**4)** $x = 0$; orden de multiplicidad 2
$x = -2$; orden de multiplicidad 2

### Ejercicio 46.3
**1)** $f(x) = \frac{1}{72}(x-3)^2.(x-2)^2$

**2)** $f(x) = \frac{4}{5}(x+5)(x+1)^2$

**3)** $f(x) = 2(x+2)(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

**4)** $f(x) = \frac{2}{3}(x-3)\left(x+\frac{1}{3}\right)^2.(x-2)$

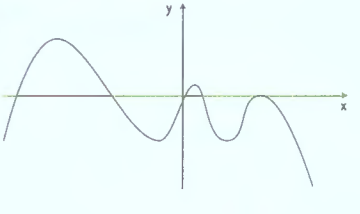
### Ejercicio 46.4
**1)** b
**2)** a
**3)** c

## VERIFICACIÓN 47
**1)** d
**2)** a
**3)** b

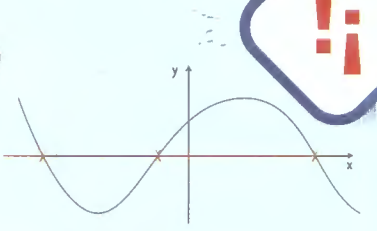
## APLICACIÓN 47

### Ejercicio 47.1
**1)** F
**2)** V
**3)** F
**4)** V
**5)** F
**6)** F

### Ejercicio 47.2
**1)**



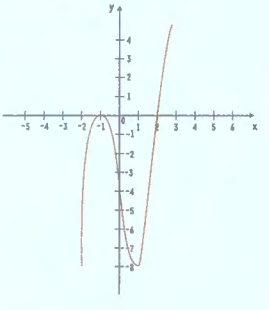

**2)**



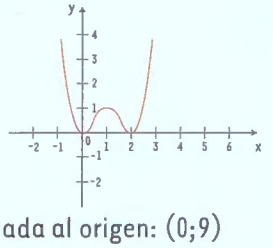

## VERIFICACIÓN 48
**1)** (0;-2)
**2)** $f(x) = (x+1)(x-1)(x+2)$
**3)** -1, simple; 1, simple y -2, simple.
**4)** -8; $\frac{5}{8}$; -2 y 12
**5)** $(-2;-1)\cup(1;+\infty)$ y
$(-\infty;-2)\cup(-1;1)$
**6)** b

## APLICACIÓN 48

### Ejercicio 48.1

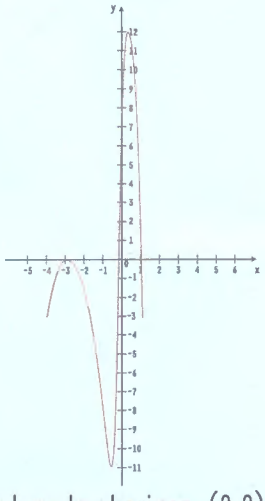



### Ejercicio 48.2
**1)** Ordenada al origen: (0;0)
Raíces:
$x_1 = 0$ (doble) y $x_2 = 2$ (doble)
$C^+ = R - \{0;2\}$ y $C^- = \varnothing$

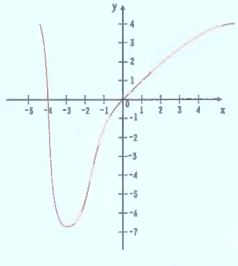



**2)** Ordenada al origen: (0;9)
Raíces:
$x_1 = 1$ (simple), $x_2 = -\frac{1}{2}$
(simple) y $x_3 = -3$ (doble)
$C^+ = \left(-\frac{1}{2};1\right)$
$C^- = (-\infty;-3)\cup\left(-3;-\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$

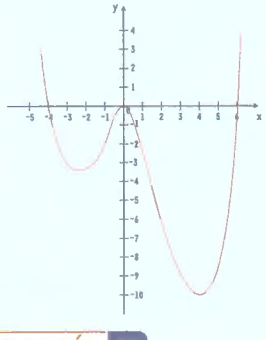
# CONTROL DE LOS RESULTADOS



**3)** Ordenada al origen: (0;0)
Raíces:
$x_1 = 0$ (triple) y
$x_2 = -4$ (simple)
$C^+ = (-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$
$C^- = (-4;0)$



**4)** Ordenada al origen: (0;0)
Raíces:
$x_1 = 0$ (doble), $x_2 = 6$ (simple)
y $x_3 = -4$ (simple)
$C^+ = (-\infty;-4)\cup(6;+\infty)$
$C^- = (-4;0)\cup(0;6)$



## VERIFICACIÓN 49

**1)** $D_f = R - \{3\}$
$y = 1 \rightarrow$ A.H.
$x = 3 \rightarrow$ A.V.

**2)** $D_f = R - \{-4;4\}$
$y = 0 \rightarrow$ A.H.
$x = 4 \wedge x = -4 \rightarrow$ A.V.

## APLICACIÓN 49

### Ejercicio 49.1

**1)** $y = \dfrac{x+1}{x^2-4}$

**2)** $y = \dfrac{2x^2-7}{x^2-9}$

## INTEGRACIÓN G

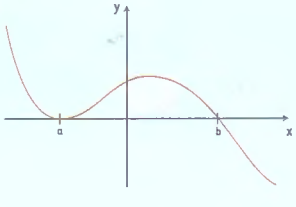
### Ejercicio G.1

**1)** $C^+ = (-4;-2)\cup(3;+\infty)$
$C^- = (-2;1)\cup(1;3)\cup(-\infty;-4)$
Crecimiento:
$(-\infty;-3)\cup(-1;1)\cup(2;+\infty)$
Decrecimiento: $(-3;-1)\cup(1;2)$

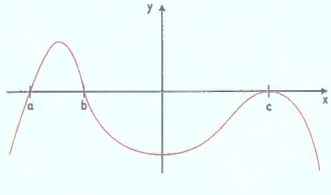
**2)** $C^+ = (-\infty;-3)\cup(-3;-1)\cup(3;5)$
$C^- = (-1;3)\cup(5;+\infty)$
Crecimiento: $(-3;-2)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$
Decrecimiento:
$(-\infty;-3)\cup\left(-2;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{9}{2};+\infty\right)$

### Ejercicio G.2

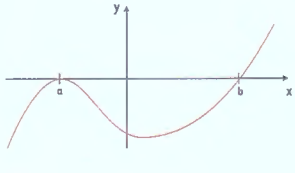
**1)**



**2)**



**3)**



### Ejercicio G.3

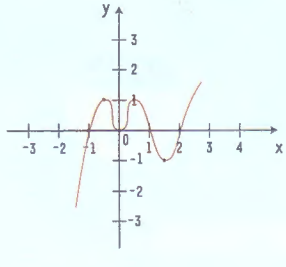
**1)** $y = 5(x-1)\left(x+\frac{4}{5}\right)$
Ordenada al origen: (0;-4)
$C^+ = \left(-\infty;-\frac{4}{5}\right)\cup(1;+\infty)$
$C^- = \left(-\frac{4}{5};1\right)$

**2)** $y = x(x-2)(x+1)$
Ordenada al origen: (0;0)
$C^+ = (-1;0)\cup(2;+\infty)$
$C^- = (-\infty;-1)\cup(0;2)$

**3)** $y = (x-1)(x+1)^2$
Ordenada al origen: (0;-1)
$C^+ = (1;+\infty)$
$C^- = (-\infty;-1)\cup(-1;1)$

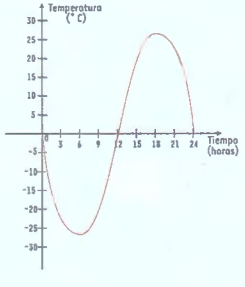
### Ejercicio G.4

Ordenada al origen: (0;0)
Raíces:
$x_1 = 0$ (doble)
$x_2 = 1$; $x_3 = 2$ y $x_4 = -1$ (simples)
$C^+ = (-1;0)\cup(0;1)\cup(2;+\infty)$
$C^- = (-\infty;-1)\cup(1;2)$



### Ejercicio G.5

**1)**




**2)** Entre las 12 y las 24 hs.
**3)** Si.

## Ejercicio G.6

**1)** F
**2)** V
**3)** V
**4)** F
**5)** V
**6)** F

## Ejercicio G.7

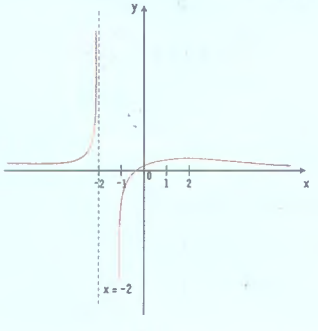
**1)** Dominio: $\mathbb{R} - \{-2\}$

$x = -2 \rightarrow$ A.V.

$y = 0 \rightarrow$ A.H.

$f(0) = \frac{1}{8}$; $f(-1) = -\frac{2}{7}$

$f(-3) = \frac{8}{19}$; $f(-4) = \frac{11}{56}$



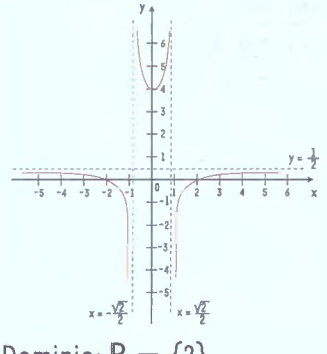

**2)** Dominio: $\mathbb{R} - \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$ A.V.

$y = \frac{1}{2} \rightarrow$ A.H.

$f(0) = 4$; $f\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 7{,}5$

$f(\pm 2) = 0$



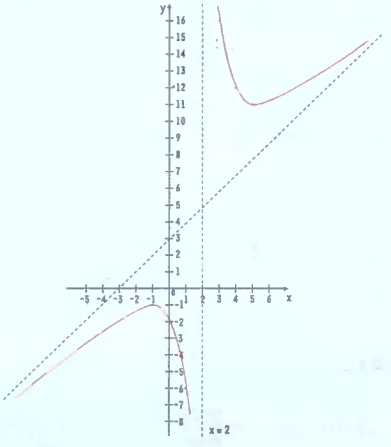

**3)** Dominio: $\mathbb{R} - \{2\}$

$x = 2 \rightarrow$ A.V.

No tiene A.H.

$f(0) = -2$; $f(1) = -6$

$f(3) = 16$; $f(4) = 12$

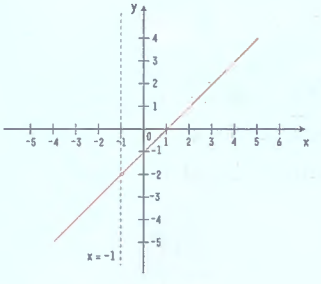



**4)** Dominio: $\mathbb{R} - \{-1\}$

No tiene A.V.

No tiene A.H.

$f(0) = -1$; $f(1) = 0$ y $f(2) = 1$




TRAMO H

### VERIFICACIÓN 50

**1)** $\frac{3}{2}\pi$; $300^G$

**2)** 30°; $33^G\ 33^M\ 33^S$

**3)** 45°; $\frac{\pi}{4}$

### APLICACIÓN 50

## Ejercicio 50.1

**1)** 57° 17′ 45″
**2)** 1.440°
**3)** 60°
**4)** 200° 32′ 7″

## Ejercicio 50.2

**1)** $\frac{5}{6}\pi$

**2)** $\frac{7}{6}\pi$

**3)** $\frac{\pi}{3}$

**4)** $\frac{7}{4}\pi$

## Ejercicio 50.3

**1)** F
**2)** V
**3)** F
**4)** V
**5)** V
**6)** V

### VERIFICACIÓN 51

**1)** $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$

**2)** $\frac{\overline{ac}}{\overline{bc}}$

**3)** $\frac{\overline{ab}}{\overline{ac}}$

**4)** $\frac{\overline{ac}}{\overline{bc}}$

**5)** $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$

**6)** $\frac{\overline{ac}}{\overline{ab}}$

### APLICACIÓN 51

## Ejercicio 51.1

**1)** z ≅ 12,21 cm
**2)** x ≅ 6,32 cm
**3)** y ≅ 7,07 m

## Ejercicio 51.2

**1)** $\operatorname{sen}\hat{\varepsilon} = \frac{6}{10}$

$\hat{\varepsilon} \cong 36° 52' 12''$

**2)** $\cos\hat{\varepsilon} = \frac{8}{10}$

$\hat{\varepsilon} \cong 36° 52' 12''$

# CONTROL DE LOS RESULTADOS

**3)** $\operatorname{sen} \hat{\delta} = \frac{8}{10}$

$\hat{\delta} \cong 53° 7' 48''$

**4)** $\operatorname{tg} \hat{\delta} = \frac{8}{6}$

$\hat{\delta} \cong 53° 7' 48''$

### Ejercicio 51.3

**1)** $\hat{\alpha} \cong 63° 38' 14''$

$x \cong 10{,}75$ cm

**2)** $\hat{\beta} \cong 69° 41' 46''$

$y \cong 5{,}21$ cm

**VERIFICACIÓN 52**

**1)** a
**2)** b
**3)** b
**4)** a
**5)** b
**6)** a

**APLICACIÓN 52**

### Ejercicio 52.1

**1)** 44,31 cm
**2)** 22,01 cm
**3)** 33,96 cm
**4)** 89,12 cm

### Ejercicio 52.2

**1)** $\hat{p} = 52° 40'$

$\overline{tp} \cong 25{,}15$ cm

$\overline{mp} \cong 15{,}25$ cm

**2)** $\hat{s} \cong 67° 22' 48''$

$\hat{t} \cong 22° 37' 12''$

$\overline{rt} = 12$ cm

**3)** $\hat{z} = 36° 40'$

$\overline{xz} \cong 26{,}47$ cm

$\overline{xy} \cong 19{,}71$ cm

**4)** $\overline{ef} \cong 23{,}32$ cm

$\hat{e} \cong 59° 2' 10''$

$\hat{f} \cong 30° 57' 50''$

### Ejercicio 52.3

**1)** $56° 18' 36''$
**2)** 101 m
**3)** 110 $cm^2$
**4)** 257,94 $cm^2$
**5)** $\hat{a} \cong 77° 21' 52''$

$\hat{b} = \hat{c} \cong 51° 19' 4''$

**VERIFICACIÓN 53**

Se verifican los resultados.

**APLICACIÓN 53**

### Ejercicio 53.1

**1)** $x \cong 63{,}45$ cm
**2)** $x \cong 8{,}07$ cm
**3)** $\hat{x} \cong 74° 37' 7''$
**4)** $\hat{x} \cong 83° 20' 19''$

**VERIFICACIÓN 54**

**1)** $\overline{mt}^2 = \overline{mn}^2 + \overline{nt}^2 - 2.\overline{mn}.\overline{nt}.\cos\hat{n}$

**2)** $\frac{\overline{yz}}{\operatorname{sen} \hat{x}} = \frac{\overline{xz}}{\operatorname{sen} \hat{y}}$

**APLICACIÓN 54**

### Ejercicio 54.1

**1)** $\overline{bc} \cong 18{,}43$ m

$\overline{ab} \cong 16{,}30$ m

$\hat{c} = 50°$

**2)** $\hat{s} \cong 41° 7' 13''$

$\hat{r} \cong 95° 52' 47''$

$\overline{st} \cong 40{,}84$ m

### Ejercicio 54.2

**1)** 19 m
**2)** 68,68 cm
**3)** 20,78 cm

### Ejercicio 54.3

**1)** 13,57 m
**2)** 13,08 km
**3)** $52° 53' 28''$, $85° 27' 34''$, $41° 38' 58''$

**VERIFICACIÓN 55**

**1)** $\operatorname{sen} \hat{\beta}$; $\sec \hat{\beta}$; $\operatorname{tg} \hat{\beta}$
**2)** $\cos \hat{\alpha}$; $\operatorname{cosec} \hat{\alpha}$; $\operatorname{ctg} \hat{\alpha}$

**APLICACIÓN 55**

### Ejercicio 55.1

**1)** $\operatorname{ctg} \hat{\beta} = \frac{8}{10}$

$\hat{\beta} \cong 51° 20' 25''$

**2)** $\sec \hat{\beta} = \frac{\sqrt{41}}{4}$

$\hat{\beta} \cong 51° 20' 25''$

**3)** $\operatorname{cosec} \hat{\delta} = \frac{\sqrt{41}}{4}$

$\hat{\delta} \cong 38° 39' 35''$

**4)** $\sec \hat{\delta} = \frac{\sqrt{41}}{5}$

$\hat{\delta} \cong 38° 39' 35''$

### Ejercicio 55.2

**1)** $x \cong 2{,}4$ m
**2)** $x \cong 10{,}37$ m
**3)** $x \cong 10{,}79$ m
**4)** $x \cong 3{,}06$ m

**VERIFICACIÓN 56**

1), 3), 5)

**INTEGRACIÓN H**

### Ejercicio H.1

**1)** $\frac{\overline{md}}{\overline{ad}}; \frac{\overline{mc}}{\overline{cd}}; \frac{\overline{ab}}{\overline{ac}}$

**2)** $\frac{\overline{am}}{\overline{ad}}; \frac{\overline{md}}{\overline{cd}}; \frac{\overline{bc}}{\overline{ac}}$

**3)** $\frac{\overline{md}}{\overline{am}}; \frac{\overline{mc}}{\overline{md}}; \frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$

**4)** $\frac{\overline{am}}{\overline{md}}; \frac{\overline{md}}{\overline{mc}}; \frac{\overline{bc}}{\overline{ab}}$

**5)** $\frac{\overline{ad}}{\overline{am}}; \frac{\overline{dc}}{\overline{md}}; \frac{\overline{ac}}{\overline{bc}}$

**6)** $\frac{\overline{ad}}{\overline{md}}; \frac{\overline{cd}}{\overline{mc}}; \frac{\overline{ac}}{\overline{ab}}$

### Ejercicio H.2

$\overline{bc} \cong 9{,}49$ cm

$\hat{c} \cong 55° 18' 17''$
$\hat{b} = 34° 41' 43''$

### Ejercicio H.3
**1)** 30°
**2)** $3\sqrt{3}$ cm$^2$
**3)** 606,72 cm$^2$
**4)** 14,76 cm$^2$

### Ejercicio H.4
**1)** $x \cong 7{,}8$ m
**2)** $x \cong 35{,}51$ m

### Ejercicio H.5
$P \cong 87{,}72$ cm
$A \cong 429{,}45$ cm$^2$

TRAMO I

VERIFICACIÓN 57

**1)** a) $<$
b) $>$
c) $<$
**2)** a) $>$
b) $<$
c) $<$
**3)** a) $<$
b) $<$
c) $>$

APLICACIÓN 57

### Ejercicio 57.1
**1)** F
**2)** V
**3)** F
**4)** F
**5)** V

### Ejercicio 57.2
**1)** $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{tg}\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

**2)** $\text{sen}\, x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{tg}\, x = 1$

**3)** $\text{sen}\, x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos x = -\frac{1}{2}$

**4)** $\text{sen}\, x = -\frac{1}{2}$

$\text{tg}\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

VERIFICACIÓN 58

**1)** $-\text{tg}\, \hat{\alpha}$
**2)** $-\text{tg}\, \hat{\alpha}$
**3)** $\text{tg}\, \hat{\alpha}$
**4)** $-\text{tg}\, \hat{\alpha}$
**5)** $\text{ctg}\, \hat{\alpha}$

APLICACIÓN 58

### Ejercicio 58.1
**1)** e
**2)** d
**3)** a
**4)** b
**5)** c
**6)** d

### Ejercicio 58.2
**1)** $\text{sen}^2 x$
**2)** $-\text{tg}\, x$
**3)** $-\text{tg}\, x$

### Ejercicio 58.3
**1)** 1
**2)** $-2\text{sen}^3 x$
**3)** $-\frac{1}{3}\text{tg}\, x$
**4)** $\frac{1}{2}\cos x.\text{sen}\, x$

### Ejercicio 58.4
**1)** $\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2};$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}$

**2)** $\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2};$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}$

**3)** $\frac{\sqrt{3}}{3}; 1; \sqrt{3}; -\sqrt{3}; -1; -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3};$

$1; \sqrt{3}; -\sqrt{3}; -1; -\frac{\sqrt{3}}{3}$

### Ejercicio 58.5
**1)** $\text{tg}\, \frac{\pi}{3}$
**2)** $-\cos \frac{\pi}{6}$
**3)** $\text{sen}\, \frac{\pi}{4}$
**4)** $\cos \frac{\pi}{4}$
**5)** $-\text{tg}\, \frac{\pi}{6}$
**6)** $\text{sen}\, \frac{\pi}{3}$

### Ejercicio 58.6
**1)** $\sqrt{6}$
**2)** $\frac{13}{12}$
**3)** $-\frac{1}{26}$
**4)** $-\frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{3}{4}$

### Ejercicio 58.7
**1)** c
**2)** a
**3)** d

VERIFICACIÓN 59

**1)** d
**2)** b
**3)** e
**4)** a
**5)** f

# CONTROL DE LOS RESULTADOS

## APLICACIÓN 59

### Ejercicio 59.1

1) F
2) F
3) F
4) V
5) V

### Ejercicio 59.2

1) Amplitud: 2

Período : $\frac{2\pi}{3}$

Ángulo de fase: $\frac{\pi}{3}$

2) Amplitud: $\frac{3}{2}$

Período : $2\pi$

Ángulo de fase: $-\frac{\pi}{5}$

3) Amplitud: 1

Período : $\frac{\pi}{2}$

Ángulo de fase: $\frac{\pi}{4}$

4) Amplitud: 4

Período : $\pi$

Ángulo de fase: 0

5) Amplitud: $\frac{1}{2}$

Período : $4\pi$

Ángulo de fase: $-\frac{\pi}{2}$

6) Amplitud: 1

Período : $2\pi$

Ángulo de fase: $\pi$

### Ejercicio 59.3

1) $f_4(x) = -2\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

2) $f_6(x) = \frac{1}{2}\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

3) $f_1(x) = 2\cos(2x)$

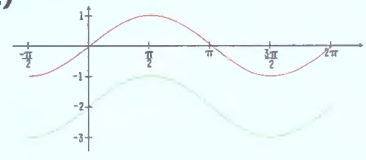
4) $f_2(x) = \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

5) $f_3(x) = 2\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

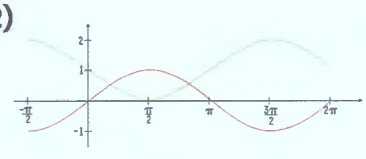
6) $f_5(x) = \frac{1}{2}\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

### Ejercicio 59.4

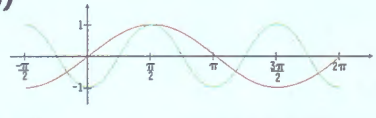
1)



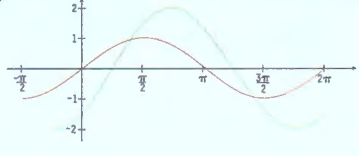
2)



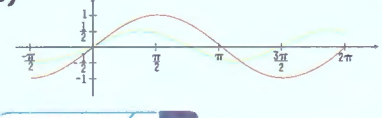
3)



4)



5)



## VERIFICACIÓN 60

1) $\hat{x} \cong 48° 35' 25''$
2) $\hat{x} \cong -44° 25' 37''$
3) $\hat{x} \cong 78° 27' 47''$
4) $\hat{x} \cong 146° 26' 34''$
5) $\hat{x} \cong 68° 11' 55''$
6) $\hat{x} \cong -65° 54' 19''$

## APLICACIÓN 60

### Ejercicio 60.1

1) b
2) c
3) d
4) a

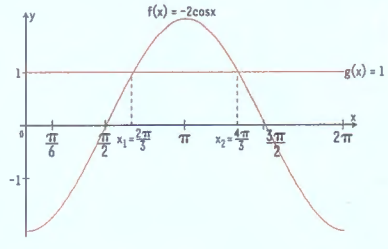
### Ejercicio 60.2

1) $S = \left\{\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; -\frac{5\pi}{3}\right\}$

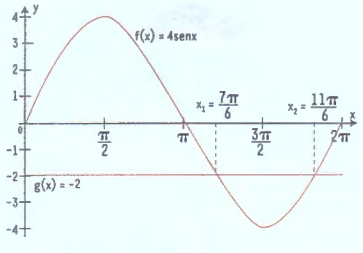
2) $S = \left\{\frac{2\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}\right\}$

## VERIFICACIÓN 61

1) $S = \left\{\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}$




2) $S = \left\{\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$




## APLICACIÓN 61

### Ejercicio 61.1

1) $S = \left\{\pi; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}$

2) $S = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$

3) $S = \{0; \pi\}$

4) $S = \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$

### Ejercicio 61.2

1) $S = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\}$

2) $S = \left\{\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$

### Ejercicio 61.3

1) $x = 60°$
2) $x = 15°$

**3)** $x = 25°$

**4)** $x = 15°$

## Ejercicio 61.4

**1)** $S = \left\{-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$

**2)** $S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

**3)** $S = \left\{-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}$

**INTEGRACIÓN 1**

## Ejercicio I.1

**1)** $C^+ = (-2\pi; -\pi)$

$C^- = (-\pi; 0)$

Crecimiento:

$\left(-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$

Decrecimiento: $\left(-\frac{3}{2}\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$

**2)** $C^+ = \left(-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$

$C^- = \left(-\frac{3}{2}\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$

Crecimiento: $(-\pi; 0)$

Decrecimiento: $(-2\pi; -\pi)$

**3)** $C^+ = \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$

$C^- = \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$

Crecimiento:

$\left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$

## Ejercicio I.2

**1)** $\frac{\pi}{9}$ hacia la derecha

1 unidad hacia arriba

**2)** $\frac{\pi}{4}$ hacia la izquierda

4 unidades hacia arriba

**3)** $\frac{\pi}{18}$ hacia la izquierda

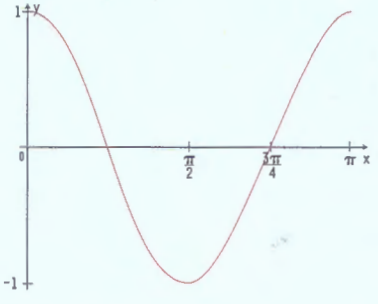
1 unidad hacia abajo

**4)** $\frac{\pi}{4}$ hacia la derecha

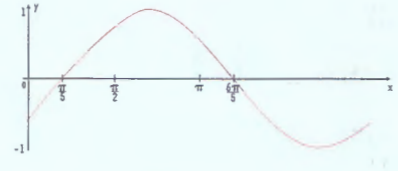
4 unidades hacia abajo

## Ejercicio I.4

**1)** $S = \left\{\frac{3}{4}\pi\right\}$



**2)** $S = \varnothing$



## Ejercicio I.5

**1)** $f(x) = -2\cos x$

**2)** $f(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(4x)$

**3)** $f(x) = 3\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)$

**4)** $f(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - 4$

## Ejercicio I.6

**1)** $S = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right\}$

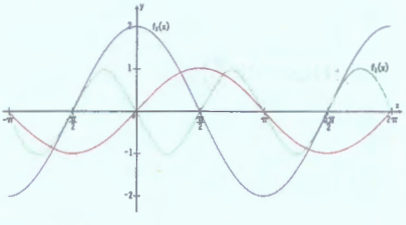
**2)** $S = \left\{0; \pi; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$

**3)** $S = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$

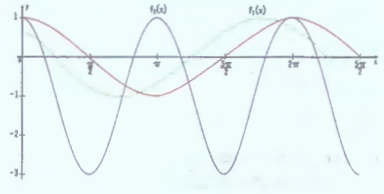
**4)** $S = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$

**5)** $S = \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$

## Ejercicio I.7

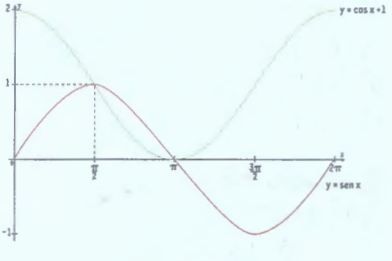


## Ejercicio I.8



## Ejercicio I.9

$S = \left\{\frac{\pi}{2}; \pi\right\}$



**TRAMO J**

**VERIFICACIÓN 62**

**1)** V

**2)** F

**3)** V

**APLICACIÓN 62**

## Ejercicio 62.1

**1)** $\vec{a}$ y $\vec{c}$; $\vec{h}$ y $\vec{d}$; $\vec{b}$ y $\vec{f}$

**2)** $\vec{a}$ y $\vec{h}$; $\vec{a}$ y $\vec{d}$; $\vec{b}$ y $\vec{e}$

**3)** $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{h}$ y $\vec{d}$; $\vec{b}$, $\vec{e}$ y $\vec{f}$

# CONTROL DE LOS RESULTADOS

4) $\vec{h}$ y $\vec{d}$

### Ejercicio 62.2
1) $\overrightarrow{bc}$, $\overrightarrow{cd}$, $\overrightarrow{de}$, $\overrightarrow{ef}$, $\overrightarrow{fa}$
2) $\overrightarrow{cd}$
3) $\overrightarrow{ed}$
4) $\overrightarrow{fc}$ y $\overrightarrow{eb}$
5) $\overrightarrow{ac}$

**VERIFICACIÓN 63**

1) (5;-9)
2) $\left(3;\frac{1}{2}\right)$
3) $\left(1;\frac{3}{2}\right)$
4) (0;1)
5) (-9;6)
6) (4;3)

**APLICACIÓN 63**

### Ejercicio 63.1
1) (3;-4)
2) (0;5)
3) (-5;-5)
4) (6;-5)
5) (-2;9)
6) (6;0)

### Ejercicio 63.2
1) (1;5)
2) $\left(-1;\frac{7}{4}\right)$
3) $(3;6\sqrt{2})$

**VERIFICACIÓN 64**

1) (-1;0)
2) (-7;-10)

**APLICACIÓN 64**

### Ejercicio 64.1
1) (-4;-1)
2) (14;-3)

### Ejercicio 64.2
1) $\vec{v} = \vec{c} - \vec{d}$
2) $\vec{w} = \vec{a} + \vec{c}$
3) $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{d}$
4) $\vec{u} = -\vec{b} - \vec{c} + \vec{d}$
5) $\vec{m} = \vec{b} - \vec{a} + \vec{d}$

### Ejercicio 64.3
1) (13;0)
2) (-10;8)
3) (-5;-2)
4) (8;5)

### Ejercicio 64.4
1) (-14;12)
2) (0;-42)

**VERIFICACIÓN 65**

1) d
2) a
3) e
4) d
5) b
6) a

**APLICACIÓN 65**

### Ejercicio 65.1
1) -1
2) $\frac{3}{2}$
3) -1
4) $-\frac{1}{3}$
5) $-\frac{1}{2}$

### Ejercicio 65.2
1) No
2) No
3) Si

### Ejercicio 65.3
1) y 3)

### Ejercicio 65.4
1) $k = 2$
2) $k = -\frac{5}{9}$

### Ejercicio 65.5
1) $k = -1$
2) $k = -\frac{19}{4}$

### Ejercicio 65.6
1) (-5;-2)
2) (8;-1)
3) (-3;-3)

**VERIFICACIÓN 66**

1) 10
2) $\frac{5}{2}$
3) $3\sqrt{10}$

**APLICACIÓN 66**

### Ejercicio 66.1
1) $5\vec{i} + \vec{j}$
2) $-2\vec{i} + 4\vec{j}$
3) $2\vec{i}$
4) $-6\vec{i} - 3\vec{j}$
5) $\vec{i} - 5\vec{j}$
6) $-3\vec{j}$

### Ejercicio 66.2
1) (3;-1)
2) (-1;7)
3) $\sqrt{10}$
4) $5\sqrt{2}$
5) $\left(\frac{3\sqrt{10}}{10};-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$
6) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{10};\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)$

**VERIFICACIÓN 67**

1) $-\frac{1}{2}$
2) -9

**APLICACIÓN 67**

### Ejercicio 67.1
1) 5; no perpendiculares
2) -1; no perpendiculares
3) 0; perpendiculares

ESCUELA MEDIA Nº 13
BIBLIOTECA

**4)** 0; perpendiculares

### Ejercicio 67.2
**1)** f
**2)** d
**3)** a
**4)** d
**5)** b

### Ejercicio 67.3
$k = -\frac{5}{4}$

### Ejercicio 67.4
**1)** $\frac{\pi}{6} = 30°$

**2)** $\frac{3\pi}{4} = 135°$

### Ejercicio 67.5
**1)** $\hat{\alpha} \cong 105° 15' 18''$
**2)** $\hat{\alpha} = 180°$
**3)** $\hat{\alpha} = 45°$
**4)** $\hat{\alpha} = 90°$

### Ejercicio 67.6
**1)** $\vec{u}\hat{\vec{v}} \cong 100° 29' 29''$

**2)** $\vec{u}\hat{\vec{w}} \cong 11° 53' 19''$

### Ejercicio 67.7
$\hat{\alpha} \cong 56° 18' 36''$
$\hat{\beta} \cong 52° 7' 30''$
$\hat{\gamma} \cong 71° 33' 54''$

## VERIFICACIÓN 68
M: $(x;y) = (1;4) + \alpha(2;3)$

## APLICACIÓN 68

### Ejercicio 68.1
**1)** A: $(x;y) = (1;2) + \alpha(-3;2)$

**2)** B: $(x;y) = (2;0) + \alpha\left(-\frac{3}{2};-2\right)$

**3)** C: $(x;y) = (3;0) + \alpha(8;2)$

### Ejercicio 68.2
**1)** $R_1$: $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

**2)** $R_2$: $y = -\frac{1}{2}x - 4$

## INTEGRACIÓN J

### Ejercicio J.1
**1)** V
**2)** F
**3)** F
**4)** F
**5)** F
**6)** V

### Ejercicio J.2
**1)** a) $\overrightarrow{ac}$
b) $\overrightarrow{cd}$
c) $\overrightarrow{bd}$
d) $\overrightarrow{cd}$
e) $\vec{0}$
**2)** a) $\overrightarrow{op}$
b) $\overrightarrow{or}$
c) $\overrightarrow{rt}$
d) $\overrightarrow{ro}$
e) $2\overrightarrow{op}$

### Ejercicio J.3
$x = 7$

### Ejercicio J.4
$d = (-2;8)$

### Ejercicio J.5
**1)** 0
**2)** (0;6)
**3)** (0;0)

### Ejercicio J.6
$|\vec{a}| = 4$ y $|\vec{b}| = 2$

### Ejercicio J.7
**1)** $\check{u} = \left(\frac{5\sqrt{34}}{34};\frac{3\sqrt{34}}{34}\right)$

**2)** $\check{v} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5};-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

**3)** $\check{w} = \left(-\frac{7\sqrt{2}}{10};\frac{\sqrt{2}}{10}\right)$

### Ejercicio J.8
**1)** $\vec{r} = (-4;1)$
**2)** $\vec{s} = (0;1)$
**3)** $\vec{t} = (0;0)$

### Ejercicio J.9
**1)** $\vec{x} = \left(-7;-\frac{1}{2}\right)$

**2)** $\vec{x} = \left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$

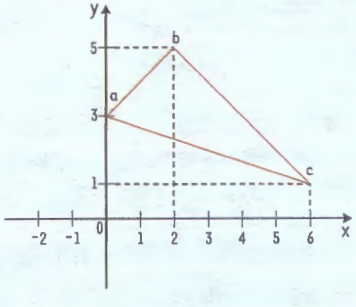
### Ejercicio J.10
**1)** A: $(x;y) = (-3;-3) + \alpha(3;2)$

**2)** Una de las posibles soluciones es:
B: $(x;y) = (4;6) + \alpha(2;-3)$
**3)** C: $(x;y) = \alpha(6;3)$

### Ejercicio J.11
**1)** A: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

**2)** B: $y = -\frac{1}{3}x - \frac{17}{6}$

### Ejercicio J.12
**1)** $|\overrightarrow{oa}| = \sqrt{13}$
$|\overrightarrow{ob}| = 2\sqrt{13}$
$|\overrightarrow{oc}| = \sqrt{34}$
**2)** $\overrightarrow{oa}\hat{\overrightarrow{ob}} \cong 112° 37' 12''$

### Ejercicio J.13



Se debe demostrar que $\overrightarrow{ba}.\overrightarrow{bc} = 0$



INVENTARIO 3561/02

# MATEMÁTICA 1

ACTIVA

*fin*